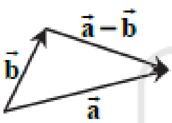
پاسخ آزمون (۱۱) ریاضی – راهبرد۱ / تاریخ : ۱۴۰۳/۰۱/۱۴ به نام خدا تعداد سوال: ۵۰ / زمان : ۷۵ دقیقه

۱- پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: ساده * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۳)

نکته: اندازهٔ بردار $\vec{a} = (a_۱, a_۲, a_۳)$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_۱^۲ + a_۲^۲ + a_۳^۲}$$

طبق شکل، بردار ضلع سوم مثلث، برابر با تفاضل دو بردار دیگر است، پس داریم:

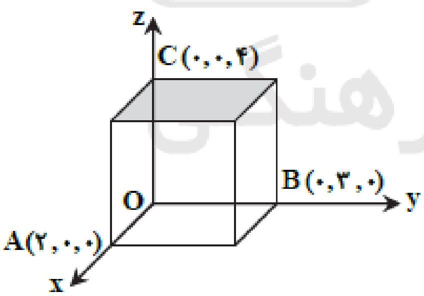


$$\vec{a}-\vec{b} = (-۱,۰,۳)-(۴,۲,-۲) = (-۵,-۲,۵) \Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(-۵)^۲+(-۲)^۲+۵^۲} = \sqrt{۵۴} = \sqrt{۹\times۶}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}-\vec{b}| = ۳\sqrt{۶}$$

۲- پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۱، فصل ۳)

مطابق شکل زیر، باید معادلهٔ وجه هاشورزده را بیابیم:



$$\begin{cases} z = ۴ \\ ۰ \le x \le ۲ \\ ۰ \le y \le ۳ \end{cases}$$

۳ – پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$ ، اندازهٔ تصویر $\vec{a}$ روی $\vec{b}$ ، $$|\vec{a}'| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

از آنجا که بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا می‌باشند $(\vec{b} = 2\vec{a})$، مجموع $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هم‌راستا با خود این بردارها می‌باشد، پس برای تصویر کـردن $\vec{c}$ بر روی $\vec{a}+\vec{b}$ می‌توانیم $\vec{c}$ را روی $\vec{a}$ تصویر کنیم:

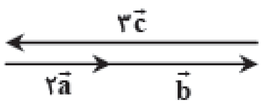
$\vec{a} = (2,0,1)$ ، $\vec{c} = (0,2,-1)$

$$\text{اندازه تصویر } \vec{c} \text{ روی } \vec{a}: \quad |\vec{c}'| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{c}|}{|\vec{a}|} = \frac{|0+0-1|}{\sqrt{4+0+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

۴ – پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

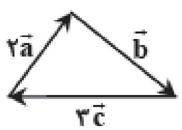
راه‌حل اول:

یا سه بردار $2\vec{a}$، $\vec{b}$ و $3\vec{c}$ هم‌راستا هستند:



که در این صورت چون $\vec{b}$ و $\vec{c}$ موازی‌اند، پس $\vec{b}\times\vec{c} = \vec{o}$ است و $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$.

و یا سه بردار $2\vec{a}$، $\vec{b}$ و $3\vec{c}$ مطابق شکل تشکیل یک مثلث می‌دهند: $2\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c} = \vec{o}$



در این صورت سه بردار در یک صفحه واقع‌اند و لذا $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$ است.

راه‌حل دوم:

نکته: برای هر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ همواره داریم: $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0 \ , \ \vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$

از فرض سؤال داریم: $2\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{2}(\vec{b}+3\vec{c})$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\frac{1}{2}(\vec{b}+3\vec{c})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = -\frac{1}{2}\underbrace{\vec{b}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}_{0} - \frac{3}{2}\underbrace{\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}_{0} = 0+0 = 0$$

۵ – پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

نکته : $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$

$$|\vec{a}| = 2 \ , \ |\vec{b}| = 3 \ , \ \vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{o} \Rightarrow \begin{cases} \vec{a}+\vec{c} = -\vec{b} \\ \vec{b}+\vec{c} = -\vec{a} \end{cases}$$

خواستهٔ سؤال برابر است با:

$$\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{c})+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{b}\cdot(-\vec{b})+\vec{a}\cdot(-\vec{a}) = -|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2 = -3^2-2^2 = -13$$

۶ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * هندسه ۳ (درس ۲، فصل ۳)

نکته: برای دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر روی بردار $\vec{b}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$\vec{a}' = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^۲}\vec{b}$ ،$\vec{b}$ روی $\vec{a}$ اندازهٔ تصویر $|\vec{a}'| = \dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$

نکته: مساحت متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده بر روی دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$S = |\vec{a}\times\vec{b}|$$

طبق مفروضات سؤال داریم:

$$|\vec{a}| = ۳\ ,\ |\vec{b}| = ۴\ ,\ |\vec{a}'| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} = ۲$$

$$\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} = ۲ \Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| = ۲|\vec{b}| = ۲\times۴ = ۸\ ,\ |\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\cos\theta| \Rightarrow ۸ = ۳\times۴|\cos\theta| \Rightarrow |\cos\theta| = \frac{۲}{۳}$$

$$\sin\theta = \sqrt{۱-\cos^۲\theta} = \sqrt{۱-\frac{۴}{۹}} = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

خواسته سؤال برابر است با:

$$S = |(۲\vec{a}+۳\vec{b})\times(۳\vec{a}+۲\vec{b})| = |۴\vec{a}\times\vec{b}+۹\vec{b}\times\vec{a}| = |-۴\vec{b}\times\vec{a}+۹\vec{b}\times\vec{a}| = |۵\vec{b}\times\vec{a}| = ۵|\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta = ۵\times۴\times۳\times\frac{\sqrt{۵}}{۳} = ۲۰\sqrt{۵}$$

تست و پاسخ ۷

تصویر قائم بردار $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$ بر بردار $\vec{b} = ۳\vec{j} - ۴\vec{k}$ کدام بردار است؟

۱) $(۰,-۱/۸,۲/۴)$ ۲) $(۰,-۰/۳۶,۰/۴۸)$ ۳) $(۰,۱/۸,-۲/۴)$ ۴) $(۰,۰/۳۶,-۰/۴۸)$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه

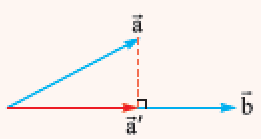
۱) اگر $\vec{u} = (u_۱, u_۲, u_۳)$ یک بردار باشد، طول بردار از رابطهٔ $|\vec{u}| = \sqrt{u_۱^۲ + u_۲^۲ + u_۳^۲}$ به دست می‌آید.

۲) حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{u} = (u_۱, u_۲, u_۳)$ و $\vec{v} = (v_۱, v_۲, v_۳)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود: $\boxed{\vec{u}.\vec{v} = u_۱v_۱ + u_۲v_۲ + u_۳v_۳}$

۳) یکی از کاربردهای مهم ضرب داخلی بردارها، محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار بر امتداد بردار دیگر است.

اگر $\vec{a}'$، تصویر قائم بردار $\vec{a}$ بر امتداد بردار $\vec{b}$ باشد، آن‌گاه $\vec{a}'$ ضریبی از بردار $\vec{b}$ است، به این صورت:

$$\vec{a}' = (\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲})\vec{b}$$



پاسخ تشریحی سؤال تصویر قائم بردار $\vec{a} = (۱,-۱,۰)$ بر امتداد بردار $\vec{b} = (۰,۳,-۴)$ را می‌خواهد، پس ابتدا حاصل $\vec{a}.\vec{b}$ را مطابق مورد (۲) درس‌نامه و حاصل $|\vec{b}|$ را مطابق مورد (۱) درس‌نامه به دست می‌آوریم:

$$|\vec{b}| = \sqrt{۰^۲ + ۳^۲ + (-۴)^۲} = ۵ \Rightarrow |\vec{b}|^۲ = ۲۵$$

$$\vec{a}.\vec{b} = (۱,-۱,۰).(۰,۳,-۴) = ۱\times۰ - ۱\times۳ - ۰\times۴ = -۳$$

پس تصویر قائم $\vec{a}$، مطابق مورد (۳) درس‌نامه برابر است با:

$$\vec{a}' = (\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|^۲})\vec{b} = \frac{-۳}{۲۵}(۰,۳,-۴) = -۰/۱۲(۰,۳,-۴) = (۰,-۰/۳۶,۰/۴۸)$$

تست و پاسخ ۸

نقاط $A(4-m,-3,-1)$ و $B(2,-m,0)$ مفروض‌اند. اگر نقطهٔ A در ناحیهٔ هفتم دستگاه مختصات سه‌بعدی قرار داشته باشد و $AB=\sqrt{14}$، فاصلهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط AB از صفحهٔ xz کدام است؟

$(-,-,-)$

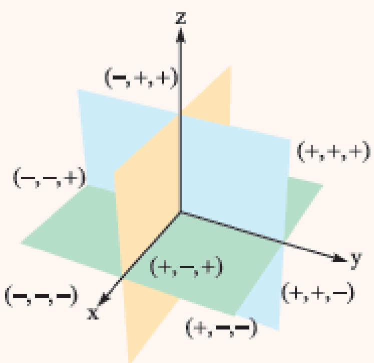
۱) ۲　　۲) ۴　　۳) ۱/۵　　۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره شرط علامت x، y و z در ناحیهٔ هفتم را، روی مختصات A اعمال کن تا محدودهٔ m به دست بیاید. حالا با داشتن طول AB، مقدار m به دست می‌آید.

درس‌نامه

۱) صفحه‌های $z=0$، $y=0$ و $x=0$ که به ترتیب آن‌ها را صفحه‌های xy، xz و yz می‌نامیم، فضای مختصات را مطابق شکل به هشت ناحیه تقسیم می‌کنند که علامت طول، عرض و ارتفاع نقاط واقع بر این هشت ناحیه را در جدول زیر می‌بینید.



شمارهٔ ناحیه	علامت مؤلفه‌ها x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

۲) اگر $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ دو نقطه در فضا باشند، طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

۳) مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط: اگر نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB با مختصات $A(x_1, y_1, z_1)$ و $B(x_2, y_2, z_2)$ باشند، آن‌گاه مختصات M برابر است با:

$$M = \frac{A+B}{2} = (\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$$

۴) فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_1, y_1, z_1)$ از صفحه‌های xy، xz و yz به صورت زیر به دست می‌آید:

۱) فاصلهٔ A از صفحهٔ xy = $|z_1|$

۲) فاصلهٔ A از صفحهٔ xz = $|y_1|$

۳) فاصلهٔ A از صفحهٔ yz = $|x_1|$

پاسخ تشریحی **گام اول (یافتن محدودهٔ m):** طبق مورد (۱) درس‌نامه اگر نقطهٔ $A(4-m, -3, -1)$ در ناحیهٔ ۷ مختصات سه‌بعدی باشد، آن‌گاه x، y و z باید منفی باشند؛ پس:

$$4 - m < 0 \Rightarrow m > 4 \quad (*)$$

گام دوم (تعیین مقدار m از روی طول پاره‌خط AB): طبق مورد (۲) درس‌نامه طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$\left.\begin{matrix} A(4-m, -3, -1) \\ B(2, -m, 0) \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB = \sqrt{(4-m-2)^2 + (-3-(-m))^2 + (-1-0)^2}$$

$$= \sqrt{(2-m)^2 + (-3+m)^2 + 1} = \sqrt{14} \Rightarrow m^2 + 4 - 4m + 9 + m^2 - 6m + 1 = 14 \Rightarrow 2m^2 - 10m + \cancel{14} = \cancel{14}$$

$$\xrightarrow{(*)} \begin{cases} m = 0 < 4 & \times \\ m = 5 > 4 & \checkmark \end{cases}$$

گام سوم (یافتن خواستهٔ سؤال): با داشتن $m = 5$، مختصات دو نقطهٔ A و B، سپس نقطهٔ وسط پاره‌خط AB مشخص می‌شود:

$$\left.\begin{matrix} A(4-m, -3, -1) \Rightarrow A(-1, -3, -1) \\ B(2, -m, 0) \Rightarrow B(2, -5, 0) \end{matrix}\right\} \xrightarrow[\text{درس‌نامه}]{\text{طبق مورد (۳)}} M = \frac{A+B}{2} = (\frac{1}{2}, -4, -\frac{1}{2})$$

حالا طبق مورد (۴) درس‌نامه فاصلهٔ نقطهٔ M از صفحهٔ xz برابر $|y| = 4$ است.

تست و پاسخ ۹

وجه‌های یک مکعب‌مستطیل، قسمت‌هایی از صفحات به معادله‌های $x = -1$، $x = 3$، $y = 1$، $y = 3$، $z = -2$ و $z = 1$ هستند. کدام‌یک از نقاط زیر بر یکی از یال‌های این مکعب‌مستطیل واقع است؟

۱) $(-1, 0, 1)$ ۲) $(3, 2, 0)$ ۳) $(0, 1, -2)$ ۴) $(1, 3, -1)$

پاسخ: گزینهٔ ۳

مشاوره کتاب درسی روی صفحه‌های موازی با صفحات مختصات زوم کرده پس باید ویژگی آن را به خوبی یاد بگیرید. این سؤال با ایده‌گرفتن از مثال صفحهٔ ۶۸ کتاب درسی طراحی شده است.

خودت حل کنی بهتره مکعب‌مستطیل مورد نظر، محدود به شش صفحه به معادلات $x = -1$، $x = 3$، $y = 1$، $y = 3$، $z = -2$ و $z = 1$ است.

درس‌نامه

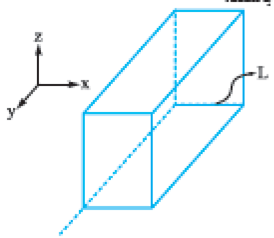
۱) صفحه‌هایی به معادلهٔ $x = \alpha$ موازی با صفحهٔ yz و عمود بر محور xهاست.

۲) صفحه‌هایی به معادلهٔ $y = \beta$ موازی با صفحهٔ xz و عمود بر محور yهاست.

۳) صفحه‌هایی به معادلهٔ $z = \gamma$ موازی با صفحهٔ xy و عمود بر محور zهاست.

پاسخ تشریحی نقاطی روی یال‌های مکعب‌مستطیل قرار دارند که حداقل به دو وجه آن تعلق داشته باشند.

به شکل روبه‌رو دقت کنید تا گزینه‌ها را با هم بررسی کنیم:



$$L:\begin{cases} y=۱ \\ z=-۲ \end{cases},\ -۱\le x\le ۳$$

$(-۱,۰,۱)$ خارج از مکعب قرار دارد، چون عرض آن در بازهٔ $[۱,۳]$ نیست؛ پس (۱) غلط است.

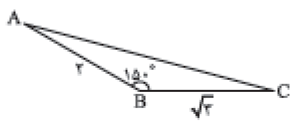
نقطهٔ $(۳,۲,۰)$ فقط روی یک وجه $\begin{cases} x=۳ \\ ۱\le y\le ۳ \\ -۲\le z\le ۱ \end{cases}$ قرار دارد، ولی روی هیچ یالی قرار ندارند؛ پس (۲) غلط است.

نقطهٔ $(۰,۱,-۲)$ روی دو وجه $\begin{cases} -۱\le x\le ۳ \\ y=۱ \\ -۲\le z\le ۱ \end{cases}$ و $\begin{cases} -۱\le x\le ۳ \\ ۱\le y\le ۳ \\ z=-۲ \end{cases}$ است، پس روی یال $L=\begin{cases} y=۱ \\ z=-۲ \end{cases},\ -۱\le x\le ۳$ قرار دارد؛ پس (۳) صحیح است.

نقطهٔ $(۱,۳,-۱)$ فقط روی یک وجه $\begin{cases} -۱\le x\le ۳ \\ y=۳ \\ -۲\le z\le ۱ \end{cases}$ قرار دارد؛ در نتیجه روی یال مکعب‌مستطیل نیست و (۴) هم غلط است.

تست و پاسخ ۱۰

با توجه به شکل، حاصل $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ کدام است؟



۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱

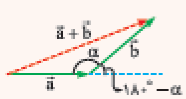
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ (۴)

خودت حل کنی بهتره به جای بردار $\overrightarrow{AC}$ بنویس $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

درس‌نامه

۱) جمع بردارهای متوالی: اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار متوالی به صورت زیر باشند، آن‌گاه $\vec{a}+\vec{b}$ برداری است که ابتدای $\vec{a}$ را به انتهای $\vec{b}$ وصل می‌کند.



۲) برای به دست آوردن زاویهٔ بین دو بردار، باید آن دو را با شروع از یک نقطه رسم کنیم.

مثلاً در شکل روبه‌رو، زاویهٔ بین دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر با α نیست، بلکه $۱۸۰°-\alpha$ است.

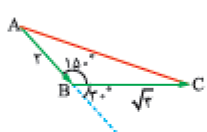
۳) اگر طول دو بردار و زاویهٔ بین آن‌ها را داشته باشیم، حاصل‌ضرب داخلی بردارها به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

نتیجه $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^۲$

۴) ضرب داخلی بردارها خاصیت پخشی دارد، یعنی: $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

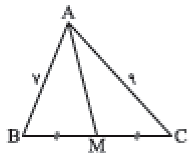
پاسخ تشریحی با توجه به شکل، می‌دانیم که $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ برابر بردار $\overrightarrow{AC}$ است، پس $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ را این‌طور می‌نویسیم:



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$$

$$=|\overrightarrow{AB}|^۲+|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos ۳۰°=۲^۲+۲\times\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۴+۳=۷$$

تست و پاسخ ۱۱



مطابق شکل زیر، در مثلث ABC ، M وسط ضلع BC است. حاصل $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}$ کدام است؟

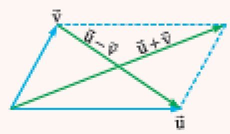
۱) ۸ ۲) ۱۲

۳) ۱۶ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

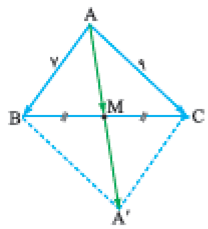
مشاوره آن دسته از سؤالات هندسه که باید یه خطی به شکل اضافه کنید تا با استفاده از آن به جواب برسید، در واقع سخت‌ترین سؤالات هندسه هستند و فقط با تمرین و تکرار، می‌تونید مشابه این سؤالات رو حل کنید.

خودت حل کنی بهتره بردار AM را به اندازهٔ خودش امتداد داده تا به A' برسید، سپس از B و C به A' وصل کنید.



درس‌نامه ۱) مطابق شکل اگر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ضلع‌های یک متوازی‌الاضلاع باشند، آن‌گاه بردارهای $\vec{v}+\vec{u}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ قطرهای این متوازی‌الاضلاع هستند.

۲) اتحادهای جبری در ضرب داخلی بردارها برقرار است، مثلاً: $(\vec{a}-\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲$



پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل اطلاعات سؤال)**، طبق اطلاعات صورت سؤال، ما طول‌های $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ را داریم، پس باید طول $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{BC}$ را به طریقی برحسب $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ به دست آوریم. برای این کار بردار $\overrightarrow{AM}$ را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به A' برسیم و سپس از B و C به A' وصل می‌کنیم تا متوازی‌الاضلاع $ABA'C$ ایجاد شود.

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال)، با توجه به شکل گام اول و درس‌نامه، می‌دانیم قطرهای متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی دو بردار $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ برابر است با:

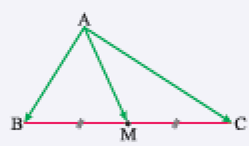
$$\begin{cases}\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \xrightarrow{\overrightarrow{AA'}=۲\overrightarrow{AM}} ۲\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\end{cases}$$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}).(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{۱}{۲}(|\overrightarrow{AC}|^۲-|\overrightarrow{AB}|^۲)$$

$$=\frac{۱}{۲}(۹^۲-۷^۲)=\frac{۱}{۲}(۸۱-۴۹)=۱۶$$

نکته بد نیست این را بدانید که در شکل زیر، همواره داریم:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$$



تست و پاسخ ۱۲

اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار عمود بر هم باشند، به طوری که $۳\vec{a}-\vec{b}=(۲,m,-۶)$ و $\vec{a}+۲\vec{b}=(۳,۴,m)$، آن‌گاه m کدام است؟

$\vec{a}.\vec{b}=۰$

۱) -۳ ۲) ۵ ۳) ۳ یا -۲ ۴) -۵ یا صفر

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره اول با استفاده از دستگاه دو معادله و دو مجهول، بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ رو به دست بیاورید.

نکته اگر دو بردار بر هم عمود باشند، حاصل‌ضرب داخلی آن‌ها صفر است و برعکس: $\vec{a}.\vec{b}=\text{۰} \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

پاسخ تشریحی ابتدا به کمک عبارت‌های داده‌شده بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}\vec{a}+\text{۲}\vec{b}=(\text{۳},\text{۴},m)\\ \text{۳}\vec{a}-\vec{b}=(\text{۲},m,-\text{۶})\end{cases}\xrightarrow{\times(\text{۲})}\begin{cases}\vec{a}+\text{۲}\vec{b}=(\text{۳},\text{۴},m)\\ \text{۶}\vec{a}-\text{۲}\vec{b}=(\text{۴},\text{۲}m,-\text{۱۲})\end{cases}\Rightarrow \vec{a}=\frac{\text{۱}}{\text{۷}}(\text{۷},\text{۴}+\text{۲}m,m-\text{۱۲})$$

$$\begin{cases}\vec{a}+\text{۲}\vec{b}=(\text{۳},\text{۴},m)\\ \text{۳}\vec{a}-\vec{b}=(\text{۲},m,-\text{۶})\end{cases}\xrightarrow{\times(-\text{۳})}\begin{cases}-\text{۳}\vec{a}-\text{۶}\vec{b}=(-\text{۹},-\text{۱۲},-\text{۳}m)\\ \text{۳}\vec{a}-\vec{b}=(\text{۲},m,-\text{۶})\end{cases}\Rightarrow \vec{b}=\frac{\text{۱}}{\text{۷}}(\text{۷},\text{۱۲}-m,\text{۳}m+\text{۶})$$

طبق نکتهٔ بالا، اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار عمود بر هم باشند، آن‌گاه:

$$\vec{a}.\vec{b}=\text{۰}\Rightarrow \frac{\text{۱}}{\text{۷}}(\text{۷},\text{۴}+\text{۲}m,m-\text{۱۲})\cdot\frac{\text{۱}}{\text{۷}}(\text{۷},\text{۱۲}-m,\text{۳}m+\text{۶})$$

$$=\frac{\text{۱}}{\text{۴۹}}(\text{۴۹}+\text{۴۸}+\text{۲۰}m-\text{۲}m^{\text{۲}}+\text{۳}m^{\text{۲}}-\text{۳۰}m-\text{۷۲})=\text{۰}\Rightarrow m^{\text{۲}}-\text{۱۰}m+\text{۲۵}=\text{۰}\Rightarrow (m-\text{۵})^{\text{۲}}=\text{۰}\Rightarrow m=\text{۵}$$

تست و پاسخ ۱۳

اگر $A(-\text{۱},-\text{۲},\text{۴})$ ، $B(-\text{۴},-\text{۲},\text{۰})$ و $C(\text{۳},-\text{۲},\text{۱})$ رأس‌های مثلث ABC باشند، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ B چند درجه است؟

۱) ۳۰° ۲) ۴۵° ۳) ۶۰° ۴) ۹۰°

پاسخ: گزینهٔ ۲

مشاوره یکی از مهم‌ترین کاربردهای ضرب داخلی، محاسبهٔ زاویهٔ بین دو بردار با معلوم‌بودن مؤلفه‌های آن‌هاست که هم کتاب درسی به آن پرداخته و هم کنکورهای گذشته.

درس‌نامه

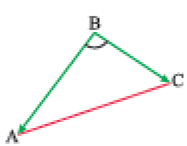
۱) اگر دو نقطهٔ $A(x_{\text{۱}},y_{\text{۱}},z_{\text{۱}})$ و $B(x_{\text{۲}},y_{\text{۲}},z_{\text{۲}})$ را داشته باشیم، آن‌گاه مؤلفه‌های بردار $\overrightarrow{AB}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{AB}=B-A=((x_{\text{۲}}-x_{\text{۱}}),(y_{\text{۲}}-y_{\text{۱}}),(z_{\text{۲}}-z_{\text{۱}}))$$

۲) اگر مختصات دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ را داشته باشیم، زاویهٔ بین این دو بردار از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

پاسخ تشریحی **گام اول (تحلیل سؤال)**، مطابق شکل زیر، زاویهٔ B بین دو بردار $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$ است؛ پس ابتدا مؤلفه‌های آن‌ها را محاسبه کرده و سپس مطابق مورد (۲) درس‌نامه، مقدار زاویهٔ B را به دست می‌آوریم.



گام دوم (محاسبهٔ مؤلفه‌های بردارهای $\overrightarrow{BA}$ و $\overrightarrow{BC}$)، مطابق مورد (۱) درس‌نامه داریم:

$$\overrightarrow{BA}=A-B=(-\text{۱},-\text{۲},\text{۴})-(-\text{۴},-\text{۲},\text{۰})=(\text{۳},\text{۰},\text{۴})$$

$$\overrightarrow{BC}=C-B=(\text{۳},-\text{۲},\text{۱})-(-\text{۴},-\text{۲},\text{۰})=(\text{۷},\text{۰},\text{۱})$$

گام سوم (محاسبهٔ زاویهٔ B)، مطابق فرمول مورد (۲) درس‌نامه، $\cos\hat{B}$ برابر است با:

$$\cos\hat{B}=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{(\text{۳},\text{۰},\text{۴}).(\text{۷},\text{۰},\text{۱})}{\sqrt{\text{۳}^{\text{۲}}+\text{۰}^{\text{۲}}+\text{۴}^{\text{۲}}}\times\sqrt{\text{۷}^{\text{۲}}+\text{۰}^{\text{۲}}+\text{۱}^{\text{۲}}}}=\frac{\text{۲۱}+\text{۰}+\text{۴}}{\text{۵}\times\text{۵}\sqrt{\text{۲}}}=\frac{\text{۲۵}}{\text{۲۵}\sqrt{\text{۲}}}=\frac{\sqrt{\text{۲}}}{\text{۲}}\Rightarrow\hat{B}=\text{۴۵}^\circ$$

۱۴ چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

ـ شرط لازم و کافی برای آن که دو بردار ناصفر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بر هم عمود باشند، این است که $\vec{a}.\vec{b}=0$ باشد.

ـ اگر $\vec{a}'$ تصویر بردار $\vec{a}$ روی بردار $\vec{b}$ باشد، همواره $\vec{a}.\vec{a}'\geq 0$ است.

ـ اگر $m\neq 0$ و $\vec{a}=(2,-1,m)$ و $\vec{b}=(m+1,3,4)$ باشد، به ازای دو مقدار حقیقی m، حاصل $(m\vec{a}\times\vec{b}).(3\vec{a}-2\vec{b})$ همواره برابر صفر است.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۴۰۳)

بررسی موارد:

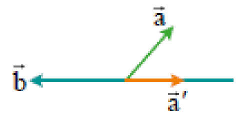
گزارهٔ اول: این گزاره درست است، زیرا:

اگر $\vec{a}.\vec{b}=0$ باشد، آن‌گاه:

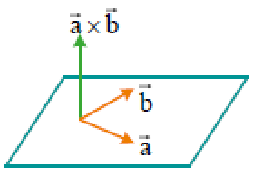
$$\vec{a}.\vec{b}=0\Rightarrow |a||b|\cos\theta=0 \xrightarrow[|\vec{b}|\neq 0]{|\vec{a}|\neq 0} \cos\theta=0\Rightarrow \theta=90^\circ$$

گزارهٔ دوم: این گزاره درست است، زیرا:

$$\vec{a}.\vec{a}'=\underbrace{|\vec{a}||\vec{a}'|\cos\theta}_{|\vec{a}'|} \xrightarrow{|\vec{a}'|=|\vec{a}|\cos\theta} \vec{a}.\vec{a}'=|\vec{a}'|^2\geq 0$$



گزارهٔ سوم: این گزاره نادرست است، زیرا $m\vec{a}\times\vec{b}$ همواره بر $k_1\vec{a}\pm k_2\vec{b}$ عمود است. پس به ازای بی‌شمار عدد حقیقی و غیرصفر m این رابطه برقرار است.



۱۵ اگر $3x+2y-4z=27$ و عبارت $9x^2+y^2+4z^2$ کمترین مقدار خود را داشته باشد، زاویهٔ بین بردارهای $\vec{m}=(x+z,y-6,-2)$ و $\vec{n}=(x+1,z+1,0)$ کدام است؟

۱) 45° ۲) 60° ۳) 120° ۴) 150°

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۴۰۳)

زاویهٔ بین دو بردار:

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

نامساوی کوشی–شوارتز

$$|\vec{a}.\vec{b}|\leq|\vec{a}||\vec{b}|$$

پاسخ تشریحی:

بردارهای $\vec{a}=(3x,y,2z)$ و $\vec{b}=(1,2,-2)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به نامساوی کوشی- شوارتز چون عبارت $9x^2+y^2+4z^2$ حداقل مقدار خود را دارد، پس باید بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ با هم موازی باشند، بنابراین:

$$\frac{3x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{2z}{-2}=t\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{t}{3}\\ y=2t\\ z=-t\end{cases}\Rightarrow 3(\frac{t}{3})+2(2t)-4(-t)=27\Rightarrow 9t=27\Rightarrow t=3\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=6\\ z=-3\end{cases}$$

حال بردارهای $\vec{m}$ و $\vec{n}$ را می‌نویسیم و زاویهٔ بین دو بردار را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{matrix}\vec{m}=(-2,0,-2)\\ \vec{n}=(2,-2,0)\end{matrix}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-4+0+0}{\sqrt{4+0+4}\times\sqrt{4+4+0}}=-\frac{4}{8}=-\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=120^\circ$$

پس زاویهٔ بین دو بردار $\vec{m}$ و $\vec{n}$ برابر 120° است.

تست و پاسخ ۱۶

۹ نفر به چند طریق می‌توانند در سه اتاق ۲نفره، ۳نفره و ۴نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

۱) ۱۲۶۰ ۲) ۲۵۲۰ ۳) ۱۵۱۲۰ ۴) ۳۸۱۰۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره *اول ۲ نفر رو برای اتاق ۲نفره انتخاب کنید، بعد ۳ نفر از بقیهٔ آدما رو برای اتاق ۳نفره انتخاب کنید؛ آخر کار هم ۴ نفر باقی‌مونده باید توی اتاق ۴نفره برن.*

درس‌نامه تعداد حالت‌های انتخاب k شیء از n شیء متمایز، به طوری که جایگشت اعضای انتخاب‌شده مهم نباشد، برابر است با:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

پاسخ تشریحی **گام اول:** اول به $\binom{۹}{۲}=۳۶$ حالت، ۲ نفر از بین ۹ نفر را برای اتاق ۲نفره انتخاب می‌کنیم.

گام دوم: بعد به $\binom{۷}{۳}=۳۵$ حالت، ۳ نفر از ۷ نفر باقی‌مانده (کلاً ۹ نفر بودن که ۲ نفرشون رفتن توی اتاق ۲نفره، پس الان $۹-۲=۷$ نفر باقی موندن) را برای اتاق ۳نفره انتخاب می‌کنیم.

گام سوم: حالا ۴ نفر داریم که باید (به یک حالت) برن توی اتاق ۴نفره.

گام چهارم: پس جواب برابر است با:

$$\binom{۹}{۲}\times\binom{۷}{۳}\times۱=۳۶\times۳۵=۱۲۶۰$$

گام چهارم: پس جواب برابر است با:

$$\binom{۹}{۲}\times\binom{۷}{۳}\times۱=۳۶\times۳۵=۱۲۶۰$$

تست و پاسخ ۱۷

به چند طریق می‌توان از بین ۴ نوع گل، دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل را به دلخواه انتخاب کرد؟

۱) $۸^۴$ ۲) $۴^۸$

۳) ۳۳۰ ۴) ۱۶۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره جواب سؤال، برابر تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$ است.

درس‌نامه تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+\cdots x_k=n$ برابر است با: $\binom{n+k-۱}{k-۱}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** تعداد شاخه‌های انتخاب‌شده از گل نوع اول، دوم، سوم و چهارم را به ترتیب با $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ نمایش می‌دهیم.

گام دوم: می‌خواهیم دسته‌گلی شامل ۸ شاخه گل از این ۴ نوع گل انتخاب کنیم، پس باید $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$ باشد.

گام سوم: واضح است که تعداد شاخه‌های انتخاب‌شده از هر نوع گل باید عددی صحیح و نامنفی (حسابی) باشد، پس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$ را می‌خواهیم که برابر است با:

$$\begin{matrix}k=۴\\n=۸\end{matrix}\Rightarrow\binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۱}{۳}=۱۶۵$$

تست و پاسخ ۱۸

در چند گروه از مربع‌های لاتین داده‌شده، دو مربع لاتین متعامد دیده می‌شود؟

(الف)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

(ب)

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

(پ)

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

(ت)

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس‌نامه •• مربع لاتین

مربع لاتین $n \times n$، مربعی است که در هر سطر و ستون آن عددهای ۱ تا n طوری قرار دارند که در هیچ سطر یا ستونی عدد تکراری نداریم، یعنی در هر سطر و در هر ستون، هر کدام از اعداد ۱ تا n دقیقاً یک بار تکرار شده‌اند. برای مثال در روبه‌رو، یک مربع لاتین ۵×۵ می‌بینید:

۲	۳	۴	۵	۱
۱	۲	۳	۴	۵
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

دو مربع لاتین متعامد: فرض کنید A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه باشند و از کنار هم قراردادن درایه‌های نظیر این دو مربع، مربعی جدید به وجود آید که درایه‌های آن اعدادی دورقمی هستند، به طوری که یکان این اعداد دورقمی، درایه‌های یکی از مربع‌ها و دهگان این اعداد، درایه‌های مربع لاتین دیگر هستند. اگر در بین درایه‌های این مربع جدید، عدد دورقمی تکراری داشتیم، این دو مربع لاتین متعامد نیستند، ولی اگر هیچ‌کدام از درایه‌ها تکراری نباشند، دو مربع لاتین متعامد می‌شوند.

پاسخ تشریحی هر کدام از موارد را بررسی می‌کنیم:

الف)

دهگان اعداد دورقمی:

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

یکان اعداد دورقمی:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

$\Rightarrow$

۱۱	۲۲	۳۳
۳۲	۱۳	۲۱
۲۳	۳۱	۱۲

عدد دورقمی تکراری نداریم، پس این دو مربع متعامدند.

ب)

دهگان اعداد دورقمی:

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

یکان اعداد دورقمی:

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

$\Rightarrow$

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

عدد دورقمی تکراری نداریم، پس این دو مربع هم متعامدند.

پ)

دهگان اعداد دورقمی:

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

یکان اعداد دورقمی:

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$\Rightarrow$

۱۳	۲۱	۳۲
۳۲	۱۳	۲۱
۲۱	۳۲	۱۳

عدد دورقمی تکراری داریم، پس این دو مربع متعامد نیستند.

ت)

دهگان اعداد دورقمی:

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

یکان اعداد دورقمی:

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

$\Rightarrow$

۱۳	۲۲	۳۱	۴۴
۴۱	۱۴	۲۳	۳۲
۳۴	۴۱	۱۲	۲۳
۲۲	۳۳	۴۴	۱۱

عدد دورقمی تکراری داریم، پس این دو مربع متعامد نیستند.

بنابراین در ۲ گروه، دو مربع لاتین متعامد داریم.

تست و پاسخ ۱۹

به چند طریق می‌توان ۱۵ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، به طوری که نفر اول لااقل ۱ توپ، نفر دوم لااقل ۲ توپ، نفر سوم لااقل ۳ توپ و نفر چهارم لااقل ۴ توپ داشته باشند؟

۱) ۸۱۶　　۲) ۱۶۵　　۳) ۵۶　　۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل‌کنی بهتره کافیه تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ با شرط $x_1 \geq 1$، $x_2 \geq 2$، $x_3 \geq 3$ و $x_4 \geq 4$ را پیدا کنیم.

درس‌نامه●● استفاده از تغییر متغیر در معادله‌های شرط‌دار

اگر در معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برای بعضی از متغیرها شرط بزرگ‌تر یا مساوی، یعنی $x_i \geq a$ داشتیم، به این صورت عمل می‌کنیم که $x_i \geq a$ است، پس از تغییر متغیر $x_i = x'_i + a$ کمک می‌گیریم که در آن $x'_i \geq 0$ است.

پاسخ تشریحی **گام اول**: تعداد توپ‌هایی که به ترتیب به نفرات اول تا چهارم می‌رسد را با x_1 تا x_4 نمایش می‌دهیم. قرار است به این افراد ۱۵ توپ داده شود، پس $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ است. می‌خواهیم به نفر اول لااقل یک توپ $(x_1 \geq 1)$، به نفر دوم لااقل ۲ توپ $(x_2 \geq 2)$، به نفر سوم لااقل ۳ توپ $(x_3 \geq 3)$ و به نفر چهارم لااقل ۴ توپ $(x_4 \geq 4)$ برسد، پس تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ با شرط‌های $x_1 \geq 1$، $x_2 \geq 2$، $x_3 \geq 3$ و $x_4 \geq 4$ را می‌خواهیم.

گام دوم: از تغییر متغیر کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases} x_1 \geq 1 \\ x_2 \geq 2 \\ x_3 \geq 3 \\ x_4 \geq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x'_1 + 1 & x'_1 \geq 0 \\ x_2 = x'_2 + 2 & x'_2 \geq 0 \\ x_3 = x'_3 + 3 & x'_3 \geq 0 \\ x_4 = x'_4 + 4 & x'_4 \geq 0 \end{cases}$$

حواسمان هست که x'_1، x'_2، x'_3 و x'_4 همگی نامنفی‌اند.

گام سوم: مقادیر به‌دست‌آمده را در معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$ جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\Rightarrow (x'_1 + 1) + (x'_2 + 2) + (x'_3 + 3) + (x'_4 + 4) = 15 \Rightarrow x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + 10 = 15$$

$$\Rightarrow x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 5$$

گام چهارم: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله را می‌خواهیم که برابر است با:

$$\begin{matrix} k = 4 \\ n = 5 \end{matrix} \Rightarrow \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{8}{3} = 56$$

با ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۶ و ۷ چند عدد یازده‌رقمی می‌توان نوشت، به طوری که ارقام آن یک‌درمیان زوج و فرد باشند؟

۱) ۳۶۰۰ ۲) ۱۸۰۰ ۳) ۲۴۰۰ ۴) ۱۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

خودت حل کنی بهتره فقط در یک حالت (به شکل زیر) می‌توانیم این ۱۱ رقم را طوری کنار هم قرار دهیم که ارقام زوج و فرد یکی‌درمیان باشند. حالا با محاسبهٔ تعداد جایگشت‌های اعداد زوج و اعداد فرد، جواب به سادگی به دست می‌آید.

زوج فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد زوج

درس‌نامه تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر $n!$ است؛ حالا اگر از بین این n شیء، k_1تا مثل هم، k_2تا مثل هم، ... و k_mتا مثل هم باشند، تعداد جایگشت‌ها برابر $\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}$ می‌شود.

برای مثال تعداد جایگشت‌های حروف aabbbcccc برابر است با: $\frac{9!}{\underbrace{2!}_{a\text{ تا }2}\times\underbrace{3!}_{b\text{ تا }3}\times\underbrace{4!}_{c\text{ تا }4}}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** در بین ۱۱ رقم ۱،۱،۲،۲،۲،۳،۴،۵،۶،۶،۷، پنج رقم فرد (۷،۵،۳،۱،۱) و شش رقم زوج (۶،۶،۴،۲،۲،۲) داریم، پس برای این‌که ارقام زوج و فرد یکی‌درمیان باشند فقط یک حالت داریم:

زوج فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد زوج فرد زوج

گام دوم: تعداد جایگشت‌های پنج رقم فرد ۷،۵،۳،۱،۱ برابر است با: $\frac{5!}{\underbrace{2!}_{1\text{ تا }2}}=60$

گام سوم: تعداد جایگشت‌های شش رقم زوج ۶،۶،۴،۲،۲،۲ برابر است با: $\frac{6!}{\underbrace{3!}_{2\text{ تا }3}\times\underbrace{2!}_{6\text{ تا }2}}=60$

پس جواب برابر $60\times 60=3600$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۱

قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ‌ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف، دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف، در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای این منظور طبق جدول زیر برنامه‌ریزی کرده‌ایم که در هر خانه از جدول، رقم دهگان نشان‌دهندهٔ ماشین و رقم یکان نشان‌دهندهٔ الیاف به کار رفته است؛ هم‌چنین کارگرها در ستون‌های جدول و روزهای هفته در سطرها قرار گرفته‌اند. مطابق این جدول کارگر دوم در روز یکشنبه با کدام ماشین و الیاف کار می‌کنند؟

	کارگر اول	کارگر دوم	کارگر سوم	کارگر چهارم	کارگر پنجم
شنبه					
یکشنبه					۱۲
دوشنبه				۱۱	۴۴
سه‌شنبه			۱۵	۴۳	۲۱
چهارشنبه		۱۴	۴۲	۲۵	۵۳

۱) ماشین دوم ـ الیاف پنجم
۲) ماشین پنجم ـ الیاف سوم
۳) ماشین پنجم ـ الیاف پنجم
۴) ماشین دوم ـ الیاف سوم

پاسخ: گزینهٔ ۴

خودت حل کنی بهتره کافیه جدول رو مثل یک مربع لاتین ۵×۵ کامل کنید! (در واقع این جدول، ترکیب دو مربع لاتین متعامد است؛ یکی برای ماشین‌ها و دیگری برای الیاف.)

پاسخ تشریحی **گام اول**: معنی توضیحات صورت سؤال اینه که یک مربع لاتین ۵×۵ داریم که درایه‌هاش اعداد دورقمی هستند که یکان این اعداد نشان‌دهندهٔ الیاف به‌کاررفته و دهگان این اعداد نشان‌دهندهٔ ماشین استفاده شده است.

گام دوم: این مربع لاتین را یک بار برای ارقام یکان پر می‌کنیم:

	کارگر اول	کارگر دوم	کارگر سوم	کارگر چهارم	کارگر پنجم
شنبه	۳	۱	۴	۲	۵
یکشنبه	۵	۳	۱	۴	۲
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
چهارشنبه	۱	۴	۲	۵	۳

پس کارگر دوم در روز یکشنبه با الیاف سوم کار می‌کند.

گام سوم: مربع لاتین را یک بار هم برای ارقام دهگان پر می‌کنیم:

	کارگر اول	کارگر دوم	کارگر سوم	کارگر چهارم	کارگر پنجم
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
یکشنبه	۴	۲	۵	۳	۱
دوشنبه	۲	۵	۳	۱	۴
سه‌شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
چهارشنبه	۳	۱	۴	۲	۵

پس کارگر دوم در روز یکشنبه با ماشین دوم کار می‌کند.

معادلهٔ $۲x^۲ + ۳y + \sqrt{z} + \frac{t}{۲} = ۱۰$، چند دسته جواب صحیح نامنفی دارد؟

۱) ۵۵ ۲) ۴۷ ۳) ۳۶ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

خودت حل کنی بهتره اول از تغییر متغیر $\sqrt{z} = a$ و $\frac{t}{۲} = b$ کمک بگیرید. بعد با حالت‌بندی برحسب x و y جواب به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** از تغییر متغیر $\sqrt{z} = a$ و $\frac{t}{۲} = b$ کمک می‌گیریم. به ازای هر مقدار صحیح و نامنفی a، دقیقاً به یک مقدار صحیح و نامنفی برای z می‌رسیم (چون $z = a^۲$ می‌شه) و به ازای هر مقدار صحیح و نامنفی برای b هم به یک مقدار صحیح و نامنفی برای t می‌رسیم (چون $t = ۲b$ می‌شه)، پس کافیه معادلهٔ $۲x^۲ + ۳y + a + b = ۱۰$ را حل کنیم.

گام دوم: برحسب مقادیر x حالت‌بندی می‌کنیم:

حالت اول: اگر $x = ۰$ باشد، باید معادلهٔ $۳y + a + b = ۱۰$ را حل کنیم. حالا برحسب مقدار y حالت‌بندی می‌کنیم:

$$۳y + a + b = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} y = ۰ \Rightarrow a + b = ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} k = ۲ \\ n = ۱۰ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۱۱}{۱} = ۱۱ \\ y = ۱ \Rightarrow a + b = ۷ \Rightarrow \begin{cases} k = ۲ \\ n = ۷ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۸}{۱} = ۸ \\ y = ۲ \Rightarrow a + b = ۴ \Rightarrow \begin{cases} k = ۲ \\ n = ۴ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۵}{۱} = ۵ \\ y = ۳ \Rightarrow a + b = ۱ \Rightarrow \begin{cases} k = ۲ \\ n = ۱ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۲}{۱} = ۲ \end{cases}$$

پس در این حالت $۲۶=۲+۵+۸+۱۱$ جواب داریم.

حالت دوم: اگر $x=۱$ باشد، باید معادلهٔ $۳y+a+b=۸$ را حل کنیم. حالا برحسب مقدار y حالت‌بندی می‌کنیم:

$$۳y+a+b=۸ \Rightarrow \begin{cases} y=۰ \Rightarrow a+b=۸ \Rightarrow \begin{cases} k=۲ \\ n=۸ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۹}{۱}=۹ \\ y=۱ \Rightarrow a+b=۵ \Rightarrow \begin{cases} k=۲ \\ n=۵ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۶}{۱}=۶ \\ y=۲ \Rightarrow a+b=۲ \Rightarrow \begin{cases} k=۲ \\ n=۲ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۳}{۱}=۳ \end{cases}$$

پس در این حالت $۱۸=۳+۶+۹$ جواب داریم.

حالت سوم: اگر $x=۲$ باشد، باید معادلهٔ $۳y+a+b=۲$ را حل کنیم. y باید برابر صفر باشد، پس:

$$۳y+a+b=۲ \xrightarrow{y=۰} a+b=۲ \Rightarrow \begin{cases} k=۲ \\ n=۲ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۳}{۱}=۳$$

گام سوم: بنابراین جواب برابر $۴۷=۳+۱۸+۲۶$ می‌شود.

تست و پاسخ ۲۳

چند عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ وجود دارد که مجموع ارقام آن مضرب ۱۱ باشد؟

۱) ۶۹ ۲) ۷۸ ۳) ۹۰ ۴) ۹۹

پاسخ: گزینهٔ ۳

خودت حل کنی بهتره از حالت‌بندی و جایگشت با تکرار کمک بگیرید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** مجموع ارقام یک عدد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰۰ حداقل برابر ۱ و حداکثر برابر ۲۷ (در حالتی که هر ۳ رقم ۹ باشند، یعنی ۹۹۹) است. می‌خواهیم جمع ارقام عدد مضرب ۱۱ باشد، پس جمع ارقام عدد باید برابر ۱۱ یا ۲۲ شود. اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰، یک، دو یا سه رقمی‌اند، پس باید تعداد اعداد یک، دو یا سه رقمی را بشماریم که جمع ارقامشان ۱۱ یا ۲۲ است.

گام دوم: اول تعداد اعدادی را می‌شماریم که جمع ارقامشان ۱۱ باشد.

فرض کنید مقدار یکان، دهگان و صدگان به ترتیب x، y و z باشد. می‌خواهیم $x+y+z=۱۱$ شود، پس (دقت کنید اگر صدگان صفر شود، اعداد دورقمی به دست می‌آیند که قابل قبول‌اند):

$$x+y+z=۱۱ \begin{cases} k=۳ \\ n=۱۱ \end{cases} \Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱}=\binom{۱۳}{۲}=۷۸$$

اما یک سری از اعداد غیر قابل قبول‌اند، برای مثال:

$$۱۱,۰,۰ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳$$

$$۱۰,۱,۰ \Rightarrow ۳!=۶$$

$۹=۶+۳$ عدد غیر قابل قبول‌اند، پس $۶۹=۹-۷۸$ عدد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰ با جمع ارقام ۱۱ داریم.

گام سوم: تعداد اعداد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰ با جمع ارقام ۲۲ را می‌شماریم. عدد یک‌رقمی و دورقمی با جمع ارقام ۲۲ نداریم، ولی اعداد سه‌رقمی با جمع ارقام ۲۲ به شکل زیرند:

$$\begin{cases} ۹,۹,۴ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳ \\ ۹,۸,۵ \Rightarrow ۳!=۶ \\ ۹,۷,۶ \Rightarrow ۳!=۶ \\ ۸,۸,۶ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳ \\ ۸,۷,۷ \Rightarrow \frac{۳!}{۲!}=۳ \end{cases}$$

پس ۲۱ عدد طبیعی کم‌تر از ۱۰۰۰ با جمع ارقام ۲۲ داریم، بنابراین جواب برابر $۹۰=۶۹+۲۱$ می‌شود.

معادلهٔ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 44$، دارای چند دسته جواب طبیعی و مضرب ۴ است که $x_5 < x_3$ باشد؟

۱) ۸۰ ۲) ۱۰۵ ۳) ۱۶۰ ۴) ۲۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ تشریحی **گام اول**: جواب‌های **طبیعی** و مضرب ۴ را می‌خواهیم، پس از تغییر متغیر $x_i = 4x'_i \ (i=1,2,3,4,5)$ کمک می‌گیریم. دقت کنید برای این‌که تعداد جواب‌های طبیعی به دست آید، باید x'_iها هم طبیعی باشند. با جای‌گذاری در معادلهٔ اصلی داریم:

$$4x'_1 + 4x'_2 + 4x'_3 + 4x'_4 + 4x'_5 = 44 \Rightarrow x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = 11$$

نکته تعداد جواب‌های طبیعی معادلهٔ $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ برابر $\binom{n-1}{k-1}$ است.

گام دوم: تعداد جواب‌های طبیعی این معادله برابر است با:

$$\begin{cases} k=5 \\ n=11 \end{cases} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{10}{4} = 210$$

گام سوم: برای این‌که $x_5 < x_3$ باشد، باید $x'_5 < x'_3$ شود. تعداد جواب‌های طبیعی این معادله که $x'_3 = x'_5$ است را برابر a در نظر بگیرید. حالا اگر در b حالت $x'_5 < x'_3$ باشد، دقیقاً در b حالت دیگر هم $x'_5 > x'_3$ می‌شود (چون مسئله متقارن است). از طرفی $a + 2b$ برابر تعداد کل جواب‌های این معادله، یعنی $a + 2b = 210$ می‌شود (چرا؟ خب کل جواب‌های مسئله می‌شه جواب‌هایی که یا $x'_3 = x'_5$ یا $x'_5 < x'_3$ یا $x'_5 > x'_3$).

گام چهارم: تعداد جواب‌های طبیعی این معادله که $x'_3 = x'_5$ است را می‌شماریم:

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 + x'_5 = 11 \xrightarrow{x'_3 = x'_5} x'_1 + x'_2 + 2x'_3 + x'_4 = 11$$

برحسب مقدار x'_3 حالت‌بندی می‌کنیم:

$$x'_1 + x'_2 + 2x'_3 + x'_4 = 11 \Rightarrow \begin{cases} x'_3 = 1 \Rightarrow x'_1 + x'_2 + x'_4 = 9 \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=9 \end{cases} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{8}{2} = 28 \\ x'_3 = 2 \Rightarrow x'_1 + x'_2 + x'_4 = 7 \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=7 \end{cases} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{6}{2} = 15 \\ x'_3 = 3 \Rightarrow x'_1 + x'_2 + x'_4 = 5 \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=5 \end{cases} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{4}{2} = 6 \\ x'_3 = 4 \Rightarrow x'_1 + x'_2 + x'_4 = 3 \Rightarrow \begin{cases} k=3 \\ n=3 \end{cases} \Rightarrow \binom{n-1}{k-1} = \binom{2}{2} = 1 \end{cases}$$

پس $a = 28 + 15 + 6 + 1 = 50$ است.

حالا با توجه به $a + 2b = 210$ داریم:

$$50 + 2b = 210 \Rightarrow 2b = 160 \Rightarrow b = 80$$

بنابراین در ۸۰ حالت $x'_5 < x'_3$ است.

 ۲۵

چند عدد بیست‌رقمی با ارقام ۰ و ۱ می‌توان نوشت که بر ۴۵ بخش‌پذیر باشد؟

۱) ۴۳۷۵۸ ‏ ‏ ‏ ۲) ۴۳۷۶۴

۳) ۴۳۷۷۰ ‏ ‏ ‏ ۴) ۴۳۷۷۶

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** عددی مضرب ۴۵ است که مضرب ۹ و ۵ باشد. برای این‌که عددی مضرب ۵ شود، یکانش باید برابر صفر یا ۵ باشد، پس یکان این عدد باید صفر باشد.

گام دوم: برای این‌که عددی مضرب ۹ باشد، باید جمع ارقامش مضرب ۹ شود. جمع ارقام این عدد ۲۰رقمی با ارقام ۰ و ۱ می‌تواند از ۱ تا ۱۹ باشد (جمع ارقام وقتی ۱ می‌شود که رقم سمت چپ برابر ۱ و مابقی ارقام برابر صفر باشند و جمع ارقام وقتی ۱۹ می‌شود که رقم یکان صفر باشد و مابقی ارقام ۱ باشند. دقت کنید رقم یکان باید برابر صفر باشد، چون می‌خواهیم عدد مضرب ۵ هم باشد.)، پس برای این‌که عدد مضرب ۹ باشد، جمع ارقامش باید برابر ۹ یا ۱۸ شود.

گام سوم: برای این‌که جمع ارقام عدد برابر ۹ باشد، باید ۹ رقم ۱ و ۱۱ رقم صفر داشته باشیم. رقم سمت راست که صفر است (چون عدد باید مضرب ۵ باشد) و رقم سمت چپ هم ۱ است (چون اگر رقم سمت چپ صفر باشد، عدد ۲۰رقمی نمی‌شود)، پس باید ۸ رقم ۱ و ۱۰ رقم صفر را در ۱۸ جایگاه وسط بچینیم که تعداد حالات آن برابر است با:

$$\frac{18!}{\underbrace{10!}_{\text{۱۰ رقم صفر}}\ \underbrace{8!}_{\text{۸ رقم یک}}}=43758$$

گام چهارم: برای این‌که جمع ارقام عدد برابر ۱۸ باشد، باید ۱۸ رقم ۱ و ۲ رقم صفر داشته باشیم. رقم سمت راست که صفر و رقم سمت چپ هم که ۱ است، پس باید ۱۷ رقم ۱ و یک رقم صفر را در ۱۸ جایگاه وسط بچینیم که تعداد حالات آن برابر است با:

$$\frac{18!}{\underbrace{17!}_{\text{۱۷ رقم یک}}}=18$$

پس جواب برابر $43758+18=43776$ می‌شود.

۲۶

- پاسخ: گزینهٔ ۲ ‏ ‏ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۳)

نکته: یک جدول مربعی از اعدادِ ۱، ۲، ... و n به‌شکل یک مربع $n\times n$ را که سطرها و ستون‌های آن با اعداد ۱، ۲، ... و n پر شده باشد و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، «مربع لاتین» می‌نامیم. (به هریک از اعدادِ درون مربع لاتین یک درایه می‌گوییم.)

با توجه به نکته واضح است که $t=1$ است.

از طرفی باز هم با توجه به نکته، m نمی‌تواند ۱ یا ۲ یا ۳ باشد، پس $m=4$ است و از آنجا واضح است که $x=1$

بنابراین یکی از دو حالت زیر پدید می‌آید:

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۳	۴	x ۱	y ۲
z ۲	۱	۴	۳

۱	۲	۳	۴
۴	۳	۲	۱
۲	۴	x ۱	y ۳
z ۳	۱	۴	۲

پس $x+y+z$ می‌تواند $1+2+2=5$ یا $1+3+3=7$ باشد.

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

۲۷ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۳)

نکته: $|A-B| = |A| - |A \cap B|$

اگر A مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۵ و B مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۱۱ باشد، در این صورت داریم:

$$S = \{۱۰۰, ۱۰۱, \cdots, ۲۵۰\}$$

$$|A| = \left[\frac{۲۵۰}{۵}\right] - \left[\frac{۹۹}{۵}\right] = ۵۰ - ۱۹ = ۳۱$$

$A \cap B$ مجموعه اعداد بخش‌پذیر بر ۵۵ است، پس داریم:

$$|A \cap B| = \left[\frac{۲۵۰}{۵۵}\right] - \left[\frac{۹۹}{۵۵}\right] = ۴ - ۱ = ۳$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$|A-B| = |A| - |A \cap B| = ۳۱ - ۳ = ۲۸$$

۲۸ - پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۱، فصل ۳)

نکته: تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\binom{n+k-۱}{k-۱}$$

با توجه به اینکه $x_۳$ مضرب ۵ است $(۵ \mid x_۳)$، پس باید مسئله را حالت‌بندی کنیم، بنابراین $x_۳$ مقادیر ۰، ۵ و ۱۰ را می‌پذیرد و اگر مقدار بزرگ‌تری اختیار کند امکان‌پذیر نیست چون متغیرهای دیگر منفی خواهند شد.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۰$$

$$x_۳ = ۰ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۱۰ \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{۱۰+۲-۱}{۲-۱} = \binom{۱۱}{۱} = ۱۱$$

$$x_۳ = ۵ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۵ \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{۵+۲-۱}{۲-۱} = ۶$$

$$x_۳ = ۱۰ \Rightarrow x_۱ + x_۲ = ۰ \Rightarrow \text{تعداد جواب} = \binom{۰+۲-۱}{۲-۱} = ۱$$

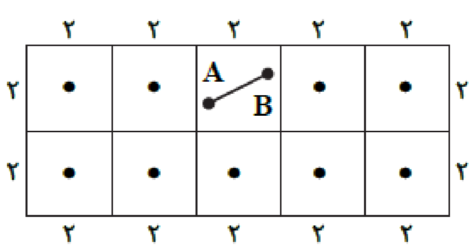
$$\Rightarrow \text{تعداد کل جواب‌ها} = ۱۱ + ۶ + ۱ = ۱۸$$

۲۹ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۳)

نکته: اصل لانه‌کبوتری: اگر m کبوتر و n لانه داشته باشیم و $m > n$ و همهٔ کبوترها درون لانه‌ها قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار گرفته است.

اگر مطابق شکل، مستطیل را به ۱۰ مربع کوچک به ضلع ۲ تقسیم کنیم، طبق اصل لانه‌کبوتری، حداقل دو نقطه از ۱۱ نقطه درون یک مربع قرار می‌گیرند که حداکثر فاصلهٔ آن‌ها، طول قطر مربع خواهد بود و خواهیم داشت:

$$AB < ۲\sqrt{۲}$$



۳۰ پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * ریاضیات گسسته (درس ۲، فصل ۳)

نکته (تعمیم اصل لانه کبوتری): هرگاه $kn+1$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند، در این صورت لانه‌ای وجود دارد که حداقل $k+1$ کبوتر در آن قرار گرفته است.

در اعداد ۴ رقمی به‌صورت $\overline{abcd}$، چون $1 \le a \le 9$ و $0 \le b \le 9$ و $0 \le c \le 9$ و $0 \le d \le 9$ است، در نتیجه $1 \le a+b+c+d \le 36$ است. یعنی مجموع ارقام آن یکی از ۳۶ حالت $\{1,2,\cdots,36\}$ است. بنابر تعمیم اصل لانه کبوتری، با انتخاب ۳۷ عدد، حداقل ۲ تا از آن‌ها مجموع ارقام یکسان خواهند داشت.

۲۱ **چه تعداد از عبارت‌های زیر در ارتباط با اثر فوتوالکتریک، درست است؟**

الف: بنا به دیدگاه فیزیک کلاسیک، پدیدهٔ فوتوالکتریک باید با هر بسامدی رخ دهد.

ب: اگر بسامد نور تابیده‌شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانه بیشتر باشد، کاهش شدت نور (با ثابت ماندن بسامد)، سبب کاهش انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها می‌شود.

ج: اگر بسامد نور تابیده‌شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانهٔ آن فلز کمتر باشد، با افزایش شدت نور (با ثابت ماندن بسامد)، ممکن است پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ دهد.

د: اگر بسامد نور تابیده‌شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانهٔ آن فلز بیشتر باشد، با افزایش بسامد نور (بدون تغییر در تعداد فوتون‌ها)، تندی فوتوالکترون‌ها افزایش می‌یابد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

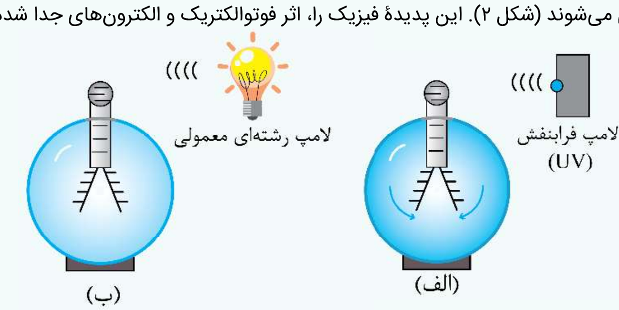
پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

بچه‌ها در هیچ درسی از متن کتاب درسی غافل نشین. حالا منطبق بر متن کتاب درسی، درسنامه زیر رو بخون

تا دهه‌های پایانی قرن نوزدهم، بیشتر حوزه‌های فیزیک، از جمله مکانیک نیوتونی، ترمودینامیک و نظریهٔ الکترومغناطیس ماکسول که امروزه با نام فیزیک کلاسیک از آن‌ها یاد می‌شود به صورت‌بندی نهایی خود رسیده بود و به نظر می‌رسید که در توصیف گسترهٔ وسیعی از پدیده‌های فیزیکی کاملاً موفق‌اند. با این حال در آن سال‌ها، پدیده‌هایی مشاهده و آزمایش‌هایی انجام شد که تبیین کامل و درست آن‌ها با نظریه‌های فیزیک کلاسیک ممکن نبود و سبب تغییرات بنیادی در دیدگاه فیزیک‌دانان نسبت به توضیح رفتار برخی از پدیده‌های فیزیکی شد. به‌طوری که در سه دههٔ آغازین قرن بیستم، نتایج این تلاش‌ها به نظریهٔ نسبیت خاص (مربوط به مطالعهٔ پدیده‌ها در تندی‌های بسیار زیاد و قابل مقایسه با تندی نور)، نظریهٔ نسبیت عام (مربوط به مطالعهٔ هندسهٔ فضا ـ زمان و گرانش) و نظریهٔ کوانتومی (مربوط به مطالعهٔ پدیده‌ها در مقیاس‌های بسیار کوچک، مانند اتم‌ها و ذره‌های سازندهٔ آن‌ها) منجر شد که امروزه به آن فیزیک جدید می‌گویند. اندکی پس از ظهور این نظریه‌ها، شاخه‌های دیگری مانند فیزیک هسته‌ای، فیزیک ذرات بنیادی و کیهان‌شناسی به تدریج به وجود آمدند.

اثر فوتوالکتریک و فوتون

اگر بر کلاهک برق‌نمایی با بار منفی، نور فرابنفشی تابیده شود، مشاهده می‌شود که انحراف ورقه‌های آن کاهش می‌یابد (شکل ۱ ـ الف) در حالی که با تابش نور مرئی، تغییری در انحراف ورقه‌های برق‌نما رخ نمی‌دهد (شکل ۲ ـ ب). چرا این پدیده‌ها اتفاق می‌افتد؟ آزمایش نشان می‌دهد وقتی نوری با بسامد مناسب مانند نور فرابنفش به سطحی فلزی بتابد الکترون‌هایی از آن گسیل می‌شوند (شکل ۲). این پدیدهٔ فیزیک را، اثر فوتوالکتریک و الکترون‌های جدا شده از سطح فلز را فوتوالکترون می‌نامند.



شکل ۱ـ الف: برهم‌کنش نور فرودی فرابنفش با کلاهک برق‌نما سبب می‌شود تا ورقه‌های آن به سرعت به هم نزدیک شوند. ب: در حالی که برهم‌کنش نور مرئی گسیل شده از یک لامپ رشته‌ای تغییری در انحراف ورقه‌های برق‌نما به وجود نمی‌آورد.

شکل ۲ـ الکترون‌ها، انرژی نور فرودی را جذب می‌کنند و از سطح فلز خارج می‌شوند.

همان‌طور که در فصل ۳ دیدیم، نور، موجی الکترومغناطیسی است، بنابراین می‌توان انتظار داشت هنگام برهم‌کنش موج الکترومغناطیسی (نور فرودی) با سطح فلز، میدان الکتریکی این موج، نیروی $\vec{F}=-e\vec{E}$ به الکترون‌های فلز وارد کند و آن‌ها را به نوسان وادارد. به این ترتیب، وقتی دامنهٔ نوسان برخی از الکترون‌ها به قدر کافی بزرگ شود انرژی جنبشی لازم را برای جدا شدن از سطح فلز پیدا می‌کنند. بنابه این دیدگاه کلاسیکی، این پدیده باید با هر بسامدی رخ دهد در حالی که این نتیجه با تجربه سازگار نیست.

یکی دیگر از پیامدهای نظریهٔ الکترومغناطیسی ماکسول این است که شدت نور با مربع دامنهٔ میدان الکتریکی موج الکترومغناطیسی متناسب است $(I \propto E^2)$. به این ترتیب انتظار می‌رود به ازای یک بسامد معین، اگر شدت نور فرودی بر سطح فلز را افزایش دهیم باید الکترون‌ها با انرژی جنبشی بیشتری از فلز خارج شوند، نتیجه‌ای که تجربه آن را تایید نمی‌کند.

شکست مدل موج الکترومغناطیسی در توضیح برخی پدیده‌ها مانند اثر فوتوالکتریک به این معنی نیست که مدل موجی نور باید کنار گذاشته شود. ولی باید متوجه باشیم که مدل موجی، تمام ویژگی‌های نور را در برندارد و به همین دلیل قادر نیست توجیه درستی از تمامی پدیده‌های فیزیکی مرتبط با برهم‌کنش نور با ماده را ارائه کند.

پس از نزدیک به ۲۰ سال که تلاش بسیاری از دانشمندان برای توجیه اثر فوتوالکتریک به کمک مفاهیم و قانون‌های فیزیک کلاسیک به نتیجه نرسیده بود در سال ۱۹۰۵ اینشتین توضیحی قانع‌کننده در مورد این اثر ارائه داد و جایزهٔ نوبل فیزیک سال ۱۹۲۱ میلادی را به خاطر تبیین آن دریافت کرد. اینشتین در نظریهٔ فوتوالکتریک خود با

توجه به کارهای قبلی پلانک در زمینهٔ تابش گرمایی اجسام، فرض کرد که نور با بسامد f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر گرفت. هر بستهٔ انرژی، که بعدها فوتون نامیده شد، دارای انرژی‌ای است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$E = hf$$

در این رابطه h ثابت پلانک نامیده می‌شود و به‌طور تجربی معلوم شده است که مقدار آن $h = ۶/۶۳ \times ۱۰^{-۳۴} J.s$ است.

بنا بر نظر اینشتین، وقتی نوری تکفام بر سطح فلزی می‌تابد، هر فوتون صرفاً با یکی از الکترون‌های فلز برهم‌کنش می‌کند. اگر فوتون انرژی کافی داشته باشد تا فرایند خارج کردن الکترون از فلز را انجام دهد، الکترون به طور آنی از آن گسیل می‌شود. در این صورت بخشی از انرژی فوتون صرف جدا کردن الکترون از فلز می‌شود و مابقی آن به انرژی جنبشی الکترون خارج‌شده تبدیل می‌شود.

نکته:

هنگامی که نوری با بسامد f به فلزی با بسامد آستانهٔ $f_۰$ (بسامد آستانه به جنس فلز بستگی دارد.) می‌تابد، سه حالت زیر رخ می‌دهد.

۱ـ $f > f_۰$: در این حالت فوتون‌های تابیده‌شده حداقل انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از فلز را دارند و پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد. در این حالت خوب است که نکات زیر را بدانید:

الف: اگر بدون تغییر در تعداد فوتون‌ها، بسامد موج (f) را افزایش دهیم، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها افزایش می‌یابد.

ب: اگر بدون تغییر در بسامد نور (f)، تعداد فوتون‌ها را افزایش دهیم، یعنی شدت نور را زیاد کنیم، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها تغییر نمی‌کند ولی تعداد الکترون‌های جداشده از فلز افزایش می‌یابد.

۲ـ $f < f_۰$: در این حالت فوتون‌های تابیده‌شده حداقل انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از فلز را ندارند و پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد. در این حالت خوب است که نکات زیر را بدانید:

الف: اگر بدون تغییر در تعداد فوتون‌ها، بسامد موج (f) را افزایش دهیم، ممکن است پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ بدهد یا ندهد. اگر بسامد نور از بسامد آستانهٔ فلز بیشتر شود یا با آن برابر شود، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد.

ب: اگر بدون تغییر در بسامد نور (f)، تعداد فوتون‌ها را افزایش دهیم، یعنی شدت نور را زیاد کنیم، با توجه به این‌که اصلاً پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد، هیچ تغییری صورت نمی‌گیرد و همچنان هیچ الکترونی از فلز جدا نمی‌شود.

۳ـ $f = f_۰$: در این حالت پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد و کل انرژی هر فوتون صرف کنده شدن الکترون از سطح فلز می‌شود، ولی انرژی جنبشی الکترون‌های جداشده صفر می‌شود.

بررسی موارد:

الف: بنابه دیدگاه فیزیک کلاسیک، پدیدهٔ فوتوالکتریک باید با هر بسامدی رخ دهد در حالی که این نتیجه با تجربه سازگار نیست. (در واقع بنابه دیدگاه فیزیک جدید، اگر بسامد نور تابیده‌شده بر سطح فلز از بسامدی موسوم به بسامد آستانه (که به جنس فلز بستگی دارد) کمتر باشد، فوتون‌ها، حداقل انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از فلز را ندارند و پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد.) (✓)

ب: اگر بسامد نور تابیده‌شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانهٔ آن فلز بیشتر باشد، کاهش شدت نور (با ثابت ماندن بسامد)، تعداد فوتون‌ها را کاهش می‌دهد و در نتیجه تعداد الکترون‌های جداشده از فلز (تعداد فوتوالکترون‌ها) کاهش می‌یابد، اما انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها تغییر نمی‌کند. (✗)

ج: اگر بسامد نور تابیده‌شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانهٔ آن فلز کمتر باشد، با افزایش شدت نور (با ثابت ماندن بسامد)، به هیچ عنوان، پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد، زیرا بسامد نور تابیده‌شده، ثابت مانده است و همچنان کمتر از بسامد آستانه می‌باشد. (✗)

د: اگر بسامد نور تابیده‌شده بر سطح یک فلز از بسامد آستانهٔ آن فلز بیشتر باشد، با افزایش بسامد نور (بدون تغییر در تعداد فوتون‌ها)، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها افزایش می‌یابد و در نتیجه بر طبق رابطهٔ انرژی جنبشی، یعنی $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$، تندی فوتوالکترون‌ها نیز افزایش می‌یابد. (✓)

گروه آموزشی ماز

۳۲ **مجموع انرژی دو فوتون A و B، برابر با $۱/۹۲ \times ۱۰^{-۱۸} J$ است. اگر طول موج فوتون A، ۸۰ درصد کمتر از طول موج فوتون B باشد، بسامد فوتون B چند هرتز است؟ $(e = ۱/۶ \times ۱۰^{-۱۹} C \ , \ h = ۴ \times ۱۰^{-۱۵} eV.s)$**

۱) $۲/۵ \times ۱۰^{۱۵}$ ۲) $۲/۵ \times ۱۰^{۱۴}$ ۳) ۵×۱۰^{۱۴} ۴) ۵×۱۰^{۱۵}

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

فوتون

اینشتین فرض کرد که نور با بسامد f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر گرفت. هر بستهٔ انرژی، فوتون نام دارد که دارای انرژی‌ای است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$E = hf \xrightarrow{f = \frac{c}{\lambda}} E = \frac{hc}{\lambda}$$

E : انرژی فوتون (J)

h : ثابت پلانک (J.s)

f : بسامد نور فرودی (Hz)

c: تندی انتشار نور در خلأ $(\frac{m}{s})$

λ : طول موج نور فرودی (m)

✓ تندی انتشار نور در خلأ، $c = ۳\times۱۰^{۸} \frac{m}{s}$ است.

✓ h ثابت پلانک نامیده می‌شود که مقدار آن در SI، $h = ۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴} J.s$ است.

الکترون ـ ولت: ژول واحد بسیار بزرگی است، بنابراین برای بیان انرژی فوتون از واحد کوچک‌تری به نام الکترون‌ولت (eV) استفاده می‌کنیم.

یک الکترون‌ولت، تغییر انرژی پتانسیل الکتریکی یک الکترون در جابه‌جایی بین دو نقطه با اختلاف پتانسیل یک ولت است:

$$|\Delta V| = \left|\frac{\Delta U}{q}\right| \rightarrow ۱eV = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹} J$$

تبدیل ژول و الکترون‌ولت به هم:

$$J \underset{\times ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{\overset{\div ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}}{\rightleftarrows}} eV$$

گام اول:

طول موج فوتون A، ۸۰ درصد کمتر از طول موج فوتون B می‌باشد، پس داریم:

$$\lambda_A = \lambda_B - \frac{۸۰}{۱۰۰}\lambda_B \rightarrow \lambda_A = \frac{۲۰}{۱۰۰}\lambda_B \rightarrow \lambda_A = \frac{۲}{۱۰}\lambda_B$$

$$\xrightarrow{\lambda=\frac{c}{f}} \frac{c}{f_A} = \frac{۲}{۱۰}(\frac{c}{f_B}) \rightarrow \frac{۱}{f_A} = \frac{۲}{۱۰}(\frac{۱}{f_B}) \rightarrow \frac{۱}{f_A} = \frac{۲}{۱۰f_B} \rightarrow ۲f_A = ۱۰f_B$$

$$\rightarrow f_A = ۵f_B$$

گام دوم:

مجموع انرژی دو فوتون A و B، برابر با $۱/۹۲\times۱۰^{-۱۸} J$ است. این میزان انرژی برحسب ژول را به الکترون‌ولت (eV) تبدیل می‌کنیم:

$$E_A + E_B = ۱/۹۲\times۱۰^{-۱۸} J = \frac{۱/۹۲\times۱۰^{-۱۸}}{۱/۶\times۱۰^{-۱۹}} = ۱۲eV$$

می‌دانیم انرژی هر فوتون از رابطهٔ $E = hf$ به‌دست می‌آید، پس داریم:

$$E_A + E_B = ۱۲ \rightarrow hf_A + hf_B = ۱۲ \rightarrow h(f_A + f_B) = ۱۲$$

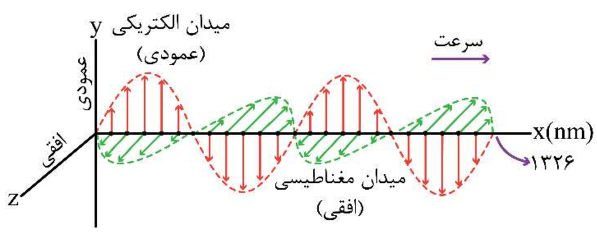
$$\xrightarrow{h=۴\times۱۰^{-۱۵}eV.s} ۴\times۱۰^{-۱۵}(f_A + f_B) = ۱۲ \rightarrow f_A + f_B = \frac{۱۲}{۴\times۱۰^{-۱۵}} = ۳\times۱۰^{۱۵}$$

$$\xrightarrow{f_A=۵f_B} ۵f_B + f_B = ۳\times۱۰^{۱۵}$$

$$\rightarrow ۶f_B = ۳\times۱۰^{۱۵} \rightarrow f_B = \frac{۳\times۱۰^{۱۵}}{۶} = ۵\times۱۰^{۱۴} Hz$$

گروه آموزشی ماز

۲۳ **شکل زیر، تصویر لحظه‌ای از نوری را نشان می‌دهد که از یک لامپ رشته‌ای با توان ورودی ۹۰W منتشر شده است؛ به طوری که این لامپ از فاصلهٔ ۳ کیلومتری دیده می‌شود. فرض کنید نور لامپ به طور یکنواخت در فضای اطراف آن منتشر می‌شود و بازده لامپ ۴۰ درصد است. در مدت زمان ۳s چه تعداد فوتون وارد هر دو مردمک چشم‌های ناظری می‌شود که در فاصلهٔ ۳ کیلومتری از لامپ قرار دارد؟ ($h = ۶/۶۳\times۱۰^{-۳۴} J.s$ و $c = ۳\times۱۰^{۸} \frac{m}{s}$ و ۲mm = قطر مردمک)**



۱) $۱۰^{۷}$

۲) ۴×۱۰^{۷}

۳) ۲×۱۰^{۷}

۴) ۸×۱۰^{۷}

پاسخ: گزینه ۳ (سخت ـ نموداری ـ ۱۲۰۵)

کمیت کوانتومی (گسسته)

کمیتی است که مضرب درستی از مقدار پایه یا کوانتوم آن کمیت است. یادتان هست که در فیزیک یازدهم، بار الکتریکی (q) کمیتی کوانتومی بود و کوانتوم آن (مقدار پایه) برابر با بار الکتریکی یک الکترون $(e = ۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}C)$ بود. در مورد انرژی موج الکترومغناطیسی هم می‌توان گفت که کمیتی کوانتومی است و مضرب درستی از انرژی یک فوتون (hf) می‌باشد:

$$E = nhf = nh\frac{c}{\lambda}$$

E : انرژی موج الکترومغناطیسی n : تعداد فوتون‌ها hf : انرژی هر فوتون

نکته: توان تابشی یک نور تکفام با بسامد f را به کمک رابطهٔ زیر به‌دست می‌آوریم:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{nhf}{t} = \frac{nhc}{\lambda t}$$

P : توان تابشی E : انرژی موج الکترومغناطیسی t : مدت‌زمان

حالا که توان تابشی رو بلد شدی، شدت تابشی یک نور تکفام رو هم یاد بگیر:

$$\text{شدت تابشی } I = \frac{P}{A} = \frac{E}{At} \rightarrow I = \frac{nhf}{At} = \frac{nhc}{\lambda At} \quad (\frac{W}{m^۲})$$

گام اول:

بازده لامپ ۴۰ درصد است، اکنون توان خروجی لامپ را به‌دست می‌آوریم:

$$\text{بازده} = \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}}\times ۱۰۰ \rightarrow ۴۰ = \frac{P_{\text{خروجی}}}{۹۰}\times ۱۰۰ \rightarrow P_{\text{خروجی}} = ۳۶W$$

گام دوم:

مساحت جبههٔ موج که در فاصلهٔ $۳km$ از چشمهٔ موج (لامپ) قرار دارد را به‌دست می‌آوریم: (در واقع مساحت کره‌ای به شعاع $۳km$ را به‌دست می‌آوریم.)

$$A = ۴\pi r^۲ \xrightarrow{r=۳km=۳\times ۱۰^۳ m} A = ۴\times\pi\times(۳\times ۱۰^۳)^۲ = ۳۶\pi\times ۱۰^۶ m^۲$$

اکنون، شدت نور در فاصلهٔ $۳km$ از چشمهٔ موج (لامپ) را به‌دست می‌آوریم:

$$I = \frac{P}{A} \xrightarrow[A=۳۶\pi\times ۱۰^۶ m^۲]{P=۳۶W} I = \frac{۳۶}{۳۶\pi\times ۱۰^۶} = \frac{۱}{\pi}\times ۱۰^{-۶}\frac{W}{m^۲}$$

گام سوم:

مساحت هر مردمک چشم ناظر، که همان مساحت یک دایره است، برابر است با:

$$A_{\text{مردمک}} = \pi r^۲ \xrightarrow[\text{قطر مردمک}: D]{r=\frac{D}{۲} \xrightarrow{D=۲mm=۲\times ۱۰^{-۳}m} r=\frac{۲\times ۱۰^{-۳}}{۲}=۱۰^{-۳}m} A_{\text{مردمک}} = \pi(۱۰^{-۳})^۲ = \pi\times ۱۰^{-۶}m^۲$$

شدت نوری که در فاصلهٔ $۳km$ از چشمه موج (لامپ) وجود دارد، همان شدت نوری است که به هر مردمک چشم ناظر وارد می‌شود.

اکنون مقدار انرژی که به هر مردمک چشم ناظر وارد می‌شود را به‌دست می‌آوریم:

$$I = \frac{E}{tA_{\text{مردمک}}} \xrightarrow[t=۳s\ ,\ A_{\text{مردمک}}=\pi\times ۱۰^{-۶}m^۲]{I=\frac{۱}{\pi}\times ۱۰^{-۶}\frac{W}{m^۲}} \frac{۱}{\pi}\times ۱۰^{-۶} = \frac{E}{۳\times\pi\times ۱۰^{-۶}}$$

$$\rightarrow E = \frac{۱}{\pi}\times ۱۰^{-۶}\times ۳\times\pi\times ۱۰^{-۶} = ۳\times ۱۰^{-۱۲}J$$

روش تستی:

با یک تناسب ساده هم می‌توانستیم انرژی که به هر مردمک وارد می‌شود را محاسبه کنیم.

$$\begin{array}{c|c} ۳۶W & ۴\pi\times(۳۰۰۰)^۲ \\ \hline P_{\text{مردمک}} & \pi\times(۱۰^{-۳})^۲ \end{array} \Rightarrow P_{\text{مردمک}} = \frac{۳۶\times\pi\times ۱۰^{-۶}}{۴\pi\times ۹\times ۱۰^۶} = ۱۰^{-۱۲}W$$

در هر ثانیه $۱۰^{-۱۲}J$ انرژی به هر مردمک می‌رسد، پس در مدت $۳s$، $۳\times ۱۰^{-۱۲}J$ انرژی به هر مردمک می‌رسد.

با توجه به تصویر لحظه‌ای نور منتشرشده، که در صورت سؤال آمده است، $2\lambda = 1326\text{nm}$ است، پس داریم:

$$2\lambda = 1326\text{nm} \rightarrow \lambda = \frac{1326}{2} = 663\text{nm} = 663\times10^{-9}\text{m}$$

پس طول موج نور منتشر شده $663\times10^{-9}\text{m}$ است.

اکنون تعداد فوتون‌های ورودی به هر مردمک چشم ناظر را به‌دست می‌آوریم:

$$E = nhf \xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} E = nh\frac{c}{\lambda} \xrightarrow[h=6/63\times10^{-34}\text{J.s}\ ,\ c=3\times10^{8}\frac{\text{m}}{\text{s}}]{E=3\times10^{-12}\text{J}\ ,\ \lambda=663\times10^{-9}\text{m}}$$

$$3\times10^{-12} = n\times6/63\times10^{-34}\times\frac{3\times10^{8}}{663\times10^{-9}} \rightarrow n = 10^{7}$$

دقت کنید که به هر مردمک چشم ناظر 10^{7} فوتون وارد می‌شود پس به هر دو مردمک چشم ناظر 2×10^{7} فوتون وارد می‌شود.

گروه آموزشی ماز

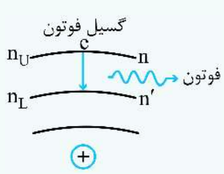
۳۴ **در اتم هیدروژن، طول‌موج سومین خط طیفی در رشتهٔ لیمان $(n'=1)$، چند نانومتر کوتاه‌تر از طول‌موج دومین خط طیفی در رشتهٔ بالمر $(n'=2)$ است؟**
$(R=\frac{1}{100}(nm)^{-1})$

۱) $\frac{۱۳۰۰}{۳}$ ۲) $\frac{۱۲۸۰}{۳}$ ۳) $\frac{۱۶۰۰}{۳}$ ۴) $\frac{۴۰۰}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

فوتون گسیل‌شده

مطابق شکل زیر هنگامی که در یک اتم، الکترون از لایه‌ای به لایه پایین‌تر منتقل می‌شود، فوتونی با بسامد f و طول‌موج λ گسیل می‌کند. برای به‌دست آوردن طول‌موج فوتون گسیل‌شده در اتم هیدروژن می‌توانیم از رابطهٔ زیر استفاده کنیم:



معادلهٔ ریدبرگ

$$\frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n_L^2}-\frac{1}{n_U^2}) \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\lambda}=R(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2})$$

$\lambda \leftarrow$ طول‌موج فوتون گسیل‌شده

$R \leftarrow$ ثابت ریدبرگ $\left(R=0/01(nm)^{-1}\right)$

n_L یا $n' \leftarrow$ شمارهٔ لایهٔ مقصد (لایه پایین‌تر)

n_U یا $n \leftarrow$ شمارهٔ لایه مبدأ (لایه بالاتر)

نکته: در رابطهٔ ریدبرگ اگر R برحسب $(nm)^{-1}$ جای‌گذاری شود، λ برحسب (nm) به‌دست می‌آید که معمولاً در سؤالات کنکور طول‌موج برحسب نانومتر خواسته می‌شود و نیازی به تبدیل واحد نیست.

بر مبنای لایهٔ مقصد، فوتون‌های گسیلی از اتم هیدروژن گروه‌بندی می‌شوند. به هر گروه در اصطلاح یک رشتهٔ اتمی گفته می‌شود و هر رشته را با نام یک دانشمند نام‌گذاری می‌کنند. به طور مثال اگر الکترون‌ها از لایهٔ بالاتر به لایهٔ شماره (۱) منتقل شوند، رشتهٔ مورد نظر را رشتهٔ لیمان می‌نامند و به الکترون‌ها و فوتون‌های مورد نظر به‌ترتیب الکترون لیمان و فوتون لیمان می‌گویند. در جدول زیر نام رشته‌های مختلف به همراه پرتو گسیل‌شده، مشخص است.

نام طیف	مقدار n'	رابطهٔ ریدبرگ مربوط به رشته	مقدارهای n	ناحیهٔ طیف
لیمان	۱	$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۱^۲}-\frac{۱}{n^۲})$	۲,۳,۴,...	فرابنفش
بالمر	۲	$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{n^۲})$	۳,۴,۵,...	فرابنفش و مرئی
پاشن	۳	$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۳^۲}-\frac{۱}{n^۲})$	۴,۵,۶,...	فروسرخ
براکت	۴	$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۴^۲}-\frac{۱}{n^۲})$	۵,۶,۷,...	فروسرخ
پفوند	۵	$\frac{۱}{\lambda}=R(\frac{۱}{۵^۲}-\frac{۱}{n^۲})$	۶,۷,۸,...	فروسرخ

نکته۱:

با توجه به جدول بالا، به نکات زیر توجه کنید:

۱ـ همهٔ فوتون‌های رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$ در ناحیهٔ فرابنفش قرار دارند، یعنی طول‌موج آن‌ها کمتر از ۴۰۰nm است.

۲ـ چهار خط طیفی اول رشتهٔ بالمر $(n'=۲)$ در ناحیهٔ مرئی قرار دارند و خط‌های طیفی بعدی آن در ناحیهٔ فرابنفش قرار دارند.

۳ـ همهٔ فوتون‌های رشته‌های پاشن $(n'=۳)$، براکت $(n'=۴)$ و پفوند $(n'=۵)$ در ناحیهٔ فروسرخ قرار دارند، یعنی طول‌موج آن‌ها از ۷۰۰nm بیشتر است.

۴ـ با توجه به چند نکتهٔ بالا می‌توان به نتایج زیر رسید:

الف: اگر اتم هیدروژن فوتونی فرابنفش تابش کند، این فوتون ممکن است به رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$ یا رشتهٔ بالمر $(n'=۲)$ تعلق داشته باشد.

ب: اگر اتم هیدروژن فوتونی مرئی تابش کند، این فوتون قطعاً مربوط به رشتهٔ بالمر $(n'=۲)$ است.

نکته۲:

در رابطهٔ $\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)$، با داشتن n'، مقدار n از $n'+۱$ (اولین خط طیفی رشتهٔ n') شروع شده و تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کند. مثلاً اولین خط طیفی رشتهٔ براکت $(n'=۴)$، $n=۵$ است. یا مثلاً سومین خط طیفی رشتهٔ بالمر $(n'=۲)$، $n=۵$ است. پس وقتی شمارهٔ یک خط طیفی از یک رشته را داریم، مقدار n از رابطهٔ $n=n'+$ شماره خط طیفی به‌دست می‌آید.

چهارمین خط طیفی رشتهٔ پاشن $\xrightarrow{n'=۳} n=۳+۴=۷$

اولین خط طیفی رشتهٔ پفوند $\xrightarrow{n'=۵} n=۵+۱=۶$

گام اول:

طبق نکات مطرح‌شده در این سؤال، در اتم هیدروژن، وقتی شمارهٔ یک خط طیفی از یک رشته را داریم، مقدار n از رابطهٔ $n=n'+$ شماره خط طیفی به‌دست می‌آید، پس داریم:

سومین خط طیفی در رشته لیمان $(n'=۱)$ $\xrightarrow[\text{شماره خط طیفی}=۳]{n'=۱} n=۱+۳=۴$

پس سومین خط طیفی در رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$، مربوط به گذار الکترون از مدار $n=۴$ به مدار $n'=۱$ است.

حال، با توجه به رابطهٔ ریدبرگ، طول‌موج سومین خط طیفی در رشتهٔ لیمان $(n'=۱)$، که آن را با $\lambda_۱$ نشان می‌دهیم، محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)\xrightarrow[n'=۱\,,\,n=۴]{R=\frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱}}\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{(۱)^۲}-\frac{۱}{(۴)^۲}\right)$$

$$\rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۱۶}\right)\rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱۶-۱}{۱\times۱۶}\right)$$

$$\rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱۵}{۱۶}\right)\rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\left(\frac{۱\times۱۵}{۱۰۰\times۱۶}\right)\rightarrow\frac{۱}{\lambda}=\left(\frac{۱۵}{۱۶۰۰}\right)$$

$$\rightarrow\lambda=\frac{۱۶۰۰}{۱۵}=\frac{۳۲۰}{۳}nm$$

گام دوم:

دومین خط طیفی رشتهٔ بالمر برابر است با:

$$(n'=2)\text{ دومین خط طیفی در رشته بالمر } \xrightarrow[\text{شماره خط طیفی}=2]{n'=2} n=2+2=4$$

پس دومین خط طیفی در رشتهٔ بالمر $(n'=2)$، مربوط به گذار الکترون از مدار $n=4$ به مدار $n'=2$ است.

حال، با توجه به رابطهٔ ریدبرگ، طول‌موج دومین خط طیفی در رشتهٔ بالمر $(n'=2)$، که آن را با λ_2 نشان می‌دهیم، محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[n'=2\,,\,n=4]{R=\frac{1}{100}(nm)^{-1}}\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{(2)^2}-\frac{1}{(4)^2}\right)$$

$$\rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)\rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}\left(\frac{4-1}{16}\right)$$

$$\rightarrow\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{100}\left(\frac{3}{16}\right)\rightarrow\frac{1}{\lambda}=\left(\frac{1\times3}{100\times16}\right)\rightarrow\frac{1}{\lambda}=\left(\frac{3}{1600}\right)$$

$$\rightarrow\lambda=\frac{1600}{3}nm$$

گام سوم:

طول موج سومین خط طیفی در رشتهٔ لیمان $(n'=1)$، یعنی λ_1 را از طول موج دومین خط طیفی در رشتهٔ بالمر $(n'=2)$، یعنی λ_2 کم می‌کنیم:

$$\Delta\lambda=\lambda_2-\lambda_1\xrightarrow[\lambda_1=\frac{320}{3}nm]{\lambda_2=\frac{1600}{3}nm}\Delta\lambda=\frac{1600}{3}-\frac{320}{3}=\frac{1280}{3}nm$$

پس طول موج سومین خط طیفی در رشت لیمان $(n'=1)$، یعنی λ_1، $\frac{1280}{3}nm$ از طول موج دومین خط طیفی در رشتهٔ بالمر $(n'=2)$، یعنی λ_2، کوتاه‌تر است.

گروه آموزشی ماز

۳۵ اگر کوتاه‌ترین طول موج در یک رشته از اتم هیدروژن، $900nm$ باشد، اختلاف بسامد اولین و سومین خط طیفی در این رشته از اتم هیدروژن، چند هرتز است؟ $(R=\frac{1}{100}(nm)^{-1}\ ,\ c=3\times10^8\frac{m}{s})$

۱) $\frac{1}{192}\times10^{16}$ ۲) $\frac{1}{96}\times10^{15}$ ۳) $\frac{1}{192}\times10^{15}$ ۴) $\frac{1}{96}\times10^{16}$

پاسخ: گزینه ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

نکته‌ها:

۱ـ اگر بیشترین بسامد یا انرژی مربوط به یک رشتهٔ اتم هیدروژن (مثلاً رشتهٔ لیمان) را از ما خواستند، الکترون باید از مدار $n=\infty$ به مدار مقصد برود.

رشتهٔ لیمان: $n'=1\ ,\ n=\infty$

رشتهٔ بالمر: $n'=2\ ,\ n=\infty$

رشتهٔ پاشن: $n'=3\ ,\ n=\infty$

رشتهٔ براکت: $n'=4\ ,\ n=\infty$

رشتهٔ پفوند: $n'=5\ ,\ n=\infty$

دقت کنید که بیشترین بسامد یا انرژی، هم‌معنی کوتاه‌ترین طول‌موج است.

۲ـ اگر کمترین بسامد یا انرژی مربوط به یک رشتهٔ اتم هیدروژن (مثلاً رشتهٔ لیمان) را از ما خواستند، الکترون باید از نزدیک‌ترین مدار به مدار مقصد برود.

رشتهٔ لیمان: $n'=1\ ,\ n=2$

رشتهٔ بالمر: $n'=2\ ,\ n=3$

رشتهٔ پاشن: $n'=3\ ,\ n=4$

رشتهٔ براکت: $n'=4\ ,\ n=5$

رشتهٔ پفوند: $n'=5\ ,\ n=6$

دقت کنید که کمترین بسامد یا انرژی، هم‌معنی بلندترین طول‌موج است.

۳ـ اختلاف کوتاه‌ترین و بلندترین طول موج در هر رشته از اتم هیدروژن را، گسترهٔ طول موج‌های آن رشته می‌گویند.

کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۰:

در اتم هیدروژن در رشتهٔ بالمر $(n'=2)$، بلندترین طول موج گسیل‌شده، چند نانومتر بیشتر از کوتاه‌ترین طول موج گسیل‌شده در این رشته است؟ $(R=0/01(nm)^{-1})$

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۲۰ ۳) ۴۰۰ ۴) ۵۰۰

پاسخ: گزینه ۲

بلندترین طول موج برای انتقال از $n=3$ به $n'=2$ است و کوتاه‌ترین طول موج برای انتقال از $n=\infty$ و $n'=2$ می‌باشد:

$$\frac{1}{\lambda_{max}}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)\rightarrow \lambda_{max}=\frac{3600}{5}=720\,nm$$

$$\frac{1}{\lambda_{min}}=\frac{1}{100}\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{\infty^2}\right)\rightarrow \lambda_{min}=400\,nm$$

$$\lambda_{max}-\lambda_{min}=320\,nm$$

نکته ۲:

۱ـ در اتم هیدروژن، هنگامی که الکترون از مدار برانگیختهٔ n به مدار n' می‌آید و $n'<n$ است، فوتونی تابش می‌کند که طول‌موج آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda}=R\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$R\simeq 0/01(nm)^{-1}$$

۲ـ با ضرب کردن دو طرف رابطهٔ فوق در سرعت نور (c)، بسامد فوتون تابش‌شده به‌دست می‌آید.

$$\frac{c}{\lambda}=Rc\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}}f=Rc\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

دقت کنید که در رابطهٔ بالا برای محاسبهٔ بسامد بر حسب هرتز (Hz)، باید R بر حسب m^{-1} جای‌گذاری شود.

$$R=0/01(nm)^{-1}=0/01\times10^{9}m^{-1}=10^{7}m^{-1}$$

۳ـ فرض کنید در اتم هیدروژن، الکترون یک بار از مدار n_1 به مدار n' می‌رود و فوتونی با بسامد f_1 تابش می‌کند و بار دوم از مدار n_2 به مدار n' می‌رود و فوتونی با بسامد f_2 تابش می‌کند. اختلاف این دو بسامد برابر است با:

$$\begin{cases}f_1=Rc\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n_1^2}\right)\\ f_2=Rc\left(\frac{1}{n'^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)\end{cases}\rightarrow \Delta f=f_2-f_1=Rc\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$

دقت کنید که در رابطهٔ بالا نیز برای محاسبهٔ اختلاف بسامد بر حسب هرتز (Hz)، باید R بر حسب m^{-1} جای‌گذاری شود.

کنکور سراسری تجربی دی ۱۴۰۱:

اختلاف بسامد اولین و دومین خط طیف اتم هیدروژن در یک رشتهٔ معین $\frac{35}{24}\times10^{14}Hz$ است. این رشته کدام است؟ $(R=\frac{1}{100}(nm)^{-1}\ ,\ c=3\times10^{8}\frac{m}{s})$

۱) براکت $(n'=4)$ ۲) لیمان $(n'=1)$
۳) پاشن $(n'=3)$ ۴) بالمر $(n'=2)$

پاسخ: گزینه ۴

فرض کنیم شمارهٔ رشتهٔ مورد نظر، n' باشد، پس برای اولین خط طیف $n=n'+1$ و برای دومین خط طیف، $n=n'+2$ است.

پس اولین خط طیف در این رشته، مربوط به گذار الکترون از مدار $n_1=n'+1$ به مدار n' است و دومین خط طیف در این رشته، مربوط به گذار الکترون از مدار $n_2=n'+2$ به مدار n' است.

با استفاده از نکتهٔ بالا می‌توان نوشت:

$$\text{اختلاف بسامدها}:\ \Delta f=Rc\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)\rightarrow\frac{35}{24}\times10^{14}=\underbrace{\frac{1}{100}\times10^{9}}_{R\ \text{بر حسب}\ m^{-1}}\times3\times10^{8}\left(\frac{1}{(n'+1)^2}-\frac{1}{(n'+2)^2}\right)$$

$$\rightarrow \frac{۷}{۱۴۴}=\frac{۱}{(n'+۱)^۲}-\frac{۱}{(n'+۲)^۲}\xrightarrow{\frac{۷}{۱۴۴}=\frac{۷}{۹\times۱۶}=\frac{۱۶-۹}{۹\times۱۶}=\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶}}$$

$$\frac{۱}{۹}-\frac{۱}{۱۶}=\frac{۱}{(n'+۱)^۲}-\frac{۱}{(n'+۲)^۲}\rightarrow\frac{۱}{(۲+۱)^۲}-\frac{۱}{(۲+۲)^۲}=\frac{۱}{(n'+۱)^۲}-\frac{۱}{(n'+۲)^۲}$$

$\rightarrow n'=۲\rightarrow$ رشتهٔ مورد نظر، رشتهٔ بالمر است.

گام اول:

طبق نکات مطرح‌شده در این سؤال، کوتاه‌ترین طول موج (λ_{min}) در یک رشته از اتم هیدروژن، زمانی اتفاق می‌افتد که، الکترون از مدار $n=\infty$ به مدار مقصد برود. به دلیل اینکه، شمارهٔ رشتهٔ مورد نظر یا همان شمارهٔ مدار مقصد (یعنی همان مقدار n') را نداریم، با استفاده از معادلهٔ ریدبرگ، شمارهٔ رشته مورد نظر یا همان شمارهٔ مدار مقصد (یعنی مقدار n') را محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{۱}{\lambda}=R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right)\xrightarrow[\lambda=\lambda_{min}=۹۰۰nm\ ,\ n=\infty]{R=\frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱}}\frac{۱}{۹۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{\infty^۲}\right)$$

$$\rightarrow\frac{۱}{۹۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}\left(\frac{۱}{n'^۲}\right)\rightarrow\frac{۱}{n'^۲}=\frac{\frac{۱}{۹۰۰}}{\frac{۱}{۱۰۰}}\rightarrow\frac{۱}{n'^۲}=\frac{۱۰۰}{۹۰۰}\rightarrow\frac{۱}{n'^۲}=\frac{۱}{۹}\rightarrow n'^۲=۹\rightarrow n'=۳$$

پس رشتهٔ مورد نظر، رشتهٔ پاشن $(n'=۳)$ است.

گام دوم:

طبق نکات مطرح‌شده در سؤال قبل دیدیم، در اتم هیدروژن، وقتی شماره یک خط طیفی از یک رشته را داریم، مقدار n از رابطهٔ $n=n'+$شماره خط طیفی به‌دست می‌آید، پس داریم:

اولین خط طیفی در رشتهٔ پاشن $(n'=۳)$ $\xrightarrow[\text{شمارهٔ خط طیفی}=۱]{n'=۳} n_۱=۳+۱=۴$

سومین خط طیفی در رشتهٔ پاشن $(n'=۳)$ $\xrightarrow[\text{شمارهٔ خط طیفی}=۳]{n'=۳} n_۲=۳+۳=۶$

پس اولین خط طیفی در رشتهٔ پاشن $(n'=۳)$، مربوط به گذار الکترون از مدار $n_۱=۴$ به مدار $n'=۳$ است و سومین خط طیفی در رشتهٔ پاشن $(n'=۳)$، مربوط به گذار الکترون از مدار $n_۲=۶$ به مدار $n'=۳$ است.

با استفاده از نکتهٔ ۲ مطرح‌شده در این سؤال، اختلاف بسامد (Δf) اولین و سومین خط طیفی در رشته پاشن $(n'=۳)$ را به‌دست می‌آوریم:

اختلاف بسامدها: $\Delta f=Rc(\frac{۱}{n_۱^۲}-\frac{۱}{n_۲^۲})\xrightarrow[n_۱=۴\ ,\ n_۲=۶]{R=\frac{۱}{۱۰۰}(nm)^{-۱}=۱۰^۷m^{-۱}\ ,\ c=۳\times۱۰^۸\frac{m}{s}}$

$$\Delta f=۱۰^۷\times۳\times۱۰^۸\left(\frac{۱}{(۴)^۲}-\frac{۱}{(۶)^۲}\right)\rightarrow\Delta f=۳\times۱۰^{۱۵}\left(\frac{۱}{۱۶}-\frac{۱}{۳۶}\right)$$

$$\rightarrow\Delta f=۳\times۱۰^{۱۵}\left(\frac{۳۶-۱۶}{۱۶\times۳۶}\right)\rightarrow\Delta f=۳\times۱۰^{۱۵}\left(\frac{۲۰}{۵۷۶}\right)$$

$$\rightarrow\Delta f=\frac{۱}{۹۶}\times۱۰^{۱۶}Hz$$

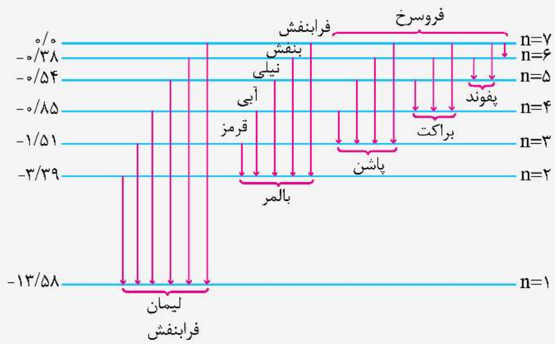
۲۶ **در اتم هیدروژن، الکترون در تراز $n=۶$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر تعداد فوتون‌های گسیلی با انرژی‌های متفاوت را با A و تعداد فوتون‌های گسیلی با انرژی‌های متفاوت که در محدودهٔ فروسرخ قرار دارند را با B نشان دهیم، $A-B$ کدام است؟**

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۷ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۵)

نکته۱:

با توجه به شکل زیر در گذارهای الکترون در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن داریم:



نکته۲:

اگر الکترون در تراز n اُم اتم هیدروژن باشد، با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، تعداد فوتون‌هایی که با انرژی‌های متفاوت می‌تواند گسیل کند از رابطهٔ $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$ به‌دست می‌آید.

کنکور سراسری ریاضی ۸۶:

در اتم هیدروژن، الکترون در تراز $n=۴$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، چند نوع فوتون با انرژی‌های متفاوت ممکن است گسیل شود؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

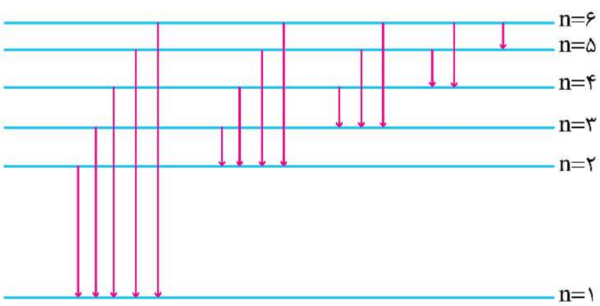
پاسخ: گزینهٔ ۳

با توجه به رابطهٔ $\frac{n(n-۱)}{۲}$ تعداد فوتون‌ها با انرژی‌های متفاوت را به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۴(۳)}{۲}=۶$$

گام اول:

در گذارهایی که در شکل مقابل نشان داده‌شده است، فوتون‌هایی با انرژی‌های متفاوت گسیل می‌شود. طبق شکل، تعداد این فوتون‌ها ۱۵ تا است. پس مقدار A، ۱۵ خواهد شد. $(A=۱۵)$

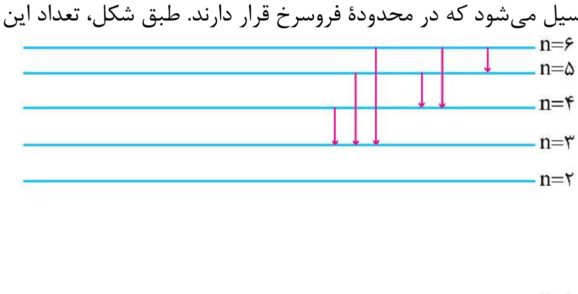


البته تعداد فوتون‌های گسیل‌شده با انرژی‌های متفاوت را (A)، می‌توانستیم از رابطهٔ $\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$ نیز به‌دست بیاوریم، ببینید:

$$A=\binom{n}{۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}\xrightarrow{n=۶}A=\binom{۶}{۲}=\frac{۶(۶-۱)}{۲}=\frac{۶(۵)}{۲}=۱۵$$

گام دوم:

در گذارهایی که در شکل زیر نشان داده شده است، فوتون‌هایی با انرژی‌های متفاوت گسیل می‌شود که در محدودهٔ فروسرخ قرار دارند. طبق شکل، تعداد این فوتون‌ها ۶ تا است، پس مقدار B، ۶ خواهد شد. $(B=۶)$

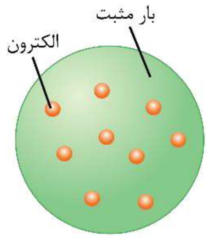


دقت کنید که در تمام گذارهای مربوط به رشته‌های پاشن $(n' = ۳)$، براکت $(n' = ۴)$ و پفوند $(n' = ۵)$، فوتون‌هایی با انرژی‌های متفاوت گسیل می‌شود که در محدودهٔ فروسرخ قرار دارند.

گام سوم:

$$A - B \xrightarrow[B=۶]{A=۱۵} ۱۵ - ۶ = ۹$$

۳۷ **به ترتیب از راست به چپ، شکل زیر نشان‌دهندهٔ مدل اتمی .... است و یکی از نارسایی‌های این مدل اتمی این بود که ....**

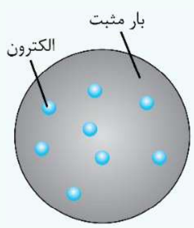


۱) تامسون ـ بسامدهای تابش گسیل‌شده از اتم، که این مدل پیش‌بینی می‌کرد با نتایج تجربی سازگار نبود.
۲) تامسون ـ بار الکتریکی اتم خنثی نبود.
۳) رادرفورد ـ بار الکتریکی اتم خنثی نبود.
۴) رادرفورد ـ بسامدهای تابش گسیل‌شده از اتم، که این مدل پیش‌بینی می‌کرد با نتایج تجربی سازگار نبود.

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ مفهومی و خط‌به‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۵)

مدل اتمی تامسون

تامسون اولین شخصی بود که موفق به کشف الکترون و اندازه‌گیری نسبت بار به جرم آن $\frac{e}{m}$ شد. طبق مدل اتمی تامسون، اتم همچون کره‌ای است که بار مثبت به طور همگن در سرتاسر آن گسترده شده است و الکترون‌ها که سهم ناچیزی در جرم اتم دارند، در جاهای مختلف آن پراکنده شده‌اند. این مدل را گاهی کیک کشمشی هم می‌گویند، زیرا الکترون‌ها مانند دانه‌های کشمش در آن پخش شده‌اند.

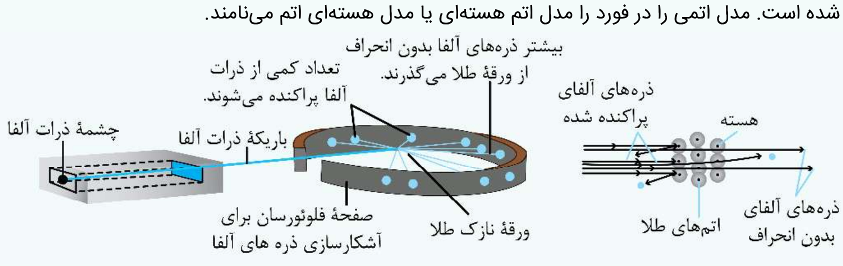


نارسایی مدل تامسون:

در مدل تامسون، الکترون‌ها با بسامدهای معینی حول وضع تعادلشان نوسان می‌کنند و این نوسان سبب تابش امواج الکترومغناطیسی از اتم می‌شود، یکی از ناکامی‌های مدل تامسون این بود که بسامدهای تابش‌شده از اتم که این مدل پیش‌بینی می‌کرد با نتایج تجربی سازگار نبود. نارسایی دیگر مدل تامسون این بود که نمی‌توانست نتایج حاصل از آزمایش ورقهٔ طلای رادرفورد را توجیه کند.

مدل اتمی رادرفورد:

رادرفورد برای بررسی مدل اتمی تامسون آزمایشی را انجام داد. در این آزمایش، باریکه‌ای از ذرات آلفا (هسته اتم هلیم) به سطح ورقهٔ بسیار نازکی از طلا تابانده می‌شود. همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید تعداد زیادی از ذره‌ها بدون انحراف و یا با انحراف کم از ورقهٔ طلا عبور می‌کنند و در برخورد با صفحهٔ فلوئورسان، در پشت ورقهٔ نازک طلا جرقه‌های نورانی تولید می‌کنند. اما برخی از ذره‌های آلفا در هنگام خروج از ورقهٔ طلا در زاویه‌های بزرگ منحرف و پراکنده می‌شوند و حتی تعدادی از آن‌ها به عقب برمی‌گردند. رادرفورد از این آزمایش نتیجه گرفت که اتم دارای یک هستهٔ بسیار چگال و کوچک (شعاع $\simeq ۱۰^{-۱۵}m$) با بار مثبت است که با تعدادی الکترون در فاصله‌هایی به نسبت دور احاطه شده است. مدل اتمی را در فورد را مدل اتم هسته‌ای یا مدل هسته‌ای اتم می‌نامند.



نارسایی مدل رادرفورد:

۱ـ عدم توجیه پایداری اتم: اگر الکترون نسبت به هسته ساکن باشد، باید تحت اثر نیروی ربایشی الکتریکی بین هسته و الکترون، روی هسته سقوط کند و در نتیجه اتم باید ناپایدار باشد که با واقعیت مطابقت ندارد و اگر الکترون مانند سیاره‌های منظومهٔ خورشیدی که به دور خورشید می‌چرخند، به دور هسته بچرخد باز هم حرکت الکترون ناپایدار خواهد بود. زیرا در این حالت حرکت الکترون شتابدار است و بنابر فیزیک کلاسیک، حرکت شتابدار الکترون باعث تابش امواج الکترومغناطیسی می‌شود که بسامد آن با بسامد حرکت مداری الکترون برابر است. با تابش امواج الکترومغناطیسی، انرژی الکترون به تدریج کاهش یافته و شعاع چرخش آن نیز به تدریج کم شده و باز هم الکترون بر روی هسته سقوط می‌کند.

۲ـ عدم توجیه طیف گسستهٔ اتم: همان‌طور که گفتیم طبق مدل رادرفورد اگر الکترون به‌صورت شتابدار به دور هسته بچرخد، امواج الکترومغناطیسی گسیل می‌کند، با کاهش انرژی الکترون، شعاع چرخش آن به تدریج کمتر شده و بسامد امواج الکترومغناطیسی گسیل‌شده به تدریج افزایش می‌یابد و به این ترتیب باید طیف امواج الکترومغناطیسی گسیل‌شده، پیوسته باشد که با واقعیت ناسازگار است. به شکل زیر دقت کنید:

پاسخ تشریحی:

شکل صورت سؤال، نشان‌دهندهٔ مدل اتمی تامسون است. طبق مدل اتمی تامسون، اتم همچون کره‌ای است که بار مثبت به طور همگن در سرتاسر آن گسترده شده است و الکترون‌ها که سهم ناچیزی در جرم اتم دارند، در جاهای مختلف آن پراکنده شده‌اند. این مدل را گاهی مدل کیک کشمشی هم می‌گویند، زیرا الکترون‌ها مانند دانه‌های کشمش در آن پخش شده‌اند.

در مدل اتمی تامسون، وقتی الکترون‌ها با بسامدهای معینی حول وضع تعادلشان نوسان می‌کنند، این نوسان سبب تابش امواج الکترومغناطیسی از اتم می‌شود. یکی از ناکامی‌های (نارسایی‌های) مدل تامسون این بود که بسامدهای تابش گسیل‌شده از اتم، که این مدل پیش‌بینی می‌کرد، با نتایج تجربی سازگار نبود.

۲۸ **در اتم هیدروژن، الکترون در چهارمین حالت برانگیخته قرار دارد. اگر در طی انتقال این الکترون، فوتونی با کمترین انرژی تابش شود، به ترتیب از راست به چپ، شعاع مدار حرکت الکترون چند برابر می‌شود و بسامد فوتون تابش‌شده، چند هرتز است؟** $(h = ۴\times۱۰^{-۱۵} eV.s\ ,\ E_R = ۱۳/۶ eV)$

۱) $\frac{۹}{۱۶}$، $۷/۶۵\times۱۰^{۱۳}$

۲) $\frac{۱۶}{۲۵}$، $۱/۶۵\times۱۰^{۱۴}$

۳) $\frac{۱۶}{۲۵}$، $۷/۶۵\times۱۰^{۱۳}$

۴) $\frac{۹}{۱۶}$، $۱/۶۵\times۱۰^{۱۴}$

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

مدل بور

بور مدل اتمی خود را بر مبنای سه اصل زیر مطرح کرد:

اصل ۱: مدارها و انرژی‌های الکترون‌ها در هر اتم کوانتیده‌اند؛ یعنی فقط مدارها و انرژی‌های گسستهٔ معینی مجاز هستند. طبق مدل بور، شعاع مدارها در اتم هیدروژن به کمک رابطهٔ مقابل به‌دست می‌آید:

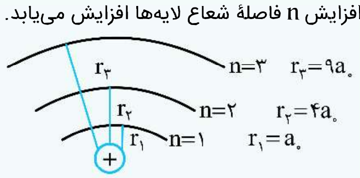
$$r_n = n^۲ a_۰$$

r_n ← شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن

$a_۰$ ← شعاع کوچک‌ترین مدار در اتم هیدروژن (به ازای $n = ۱$) که به آن شعاع بور نیز می‌گویند. $(a_۰ = ۵/۲۹\times۱۰^{-۱۱} m)$

n ← شمارهٔ مداری که الکترون روی آن قرار دارد.

نکته: با توجه به مدل بور، شعاع لایه‌های مختلف اتم هیدروژن به‌صورت شکل زیر است، همان‌طور که می‌بینید با افزایش n فاصلهٔ شعاع لایه‌ها افزایش می‌یابد.



نکته: طبق مدل بور، انرژی الکترون در مدارهای اتم هیدروژن به کمک رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

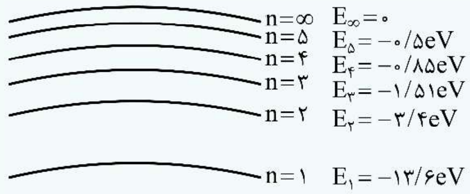
$$E_n = \frac{-E_R}{n^۲}$$

E_n ← انرژی الکترون در هر لایه از اتم هیدروژن

E_R ← انرژی الکترون در اولین مدار اتم هیدروژن (انرژی الکترون در $n = ۱$ برابر $E_۱ = -۱۳/۶ eV$ است که اندازه آن را معمولاً یک ریدبرگ می‌نامند و با نماد E_R نشان می‌دهند $(E_R = ۱۳/۶ eV)$

n ← شماره مداری که الکترون روی آن قرار دارد.

نکته: با توجه به مدل بور انرژی الکترون در لایه‌های مختلف اتم هیدروژن به‌صورت شکل زیر است. همان‌طور که می‌بینید با افزایش n فاصلهٔ انرژی لایه‌ها کاهش می‌یابد.

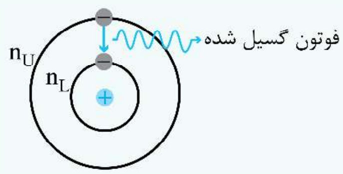


نکته: توصیه می‌کنیم برای سرعت در پاسخ‌گویی به سؤالات این قسمت، انرژی الکترون در پنج لایهٔ اول را به خاطر بسپارید.

اصل ۲: وقتی یک الکترون در یکی از مدارهای مجاز است، هیچ نوع تابش الکترومغناطیسی گسیل نمی‌شود. از این رو گفته می‌شود الکترون در مدار مانا یا حالت مانا قرار دارد.

اصل ۳: الکترون می‌تواند از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر برود. هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر E_U به یک حالت مانا با انرژی کمتر E_L، یک فوتون تابش می‌شود. در این صورت انرژی فوتون تابش‌شده برابر اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و مدار نهایی است و داریم:

$E_U - E_L = hf$ (معادلهٔ گسیل فوتون از اتم)



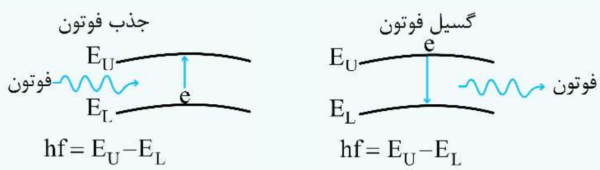
E_U ← انرژی الکترون در لایهٔ بالاتر

E_L ← انرژی الکترون در لایهٔ پایین‌تر

hf ← انرژی فوتون گسیل‌شده

هنگامی که الکترون در پایین‌ترین تراز انرژی $(n=۱)$ قرار گرفته است، در اصطلاح می‌گویند الکترون در حالت پایه قرار دارد و هنگامی که الکترون در ترازهای انرژی بالاتر $(n=۲,۳,...)$ قرار می‌گیرد، در اصطلاح می‌گویند الکترون برانگیخته شده است.

هنگامی که الکترون از یک لایه با انرژی بیشتر (E_U) به لایه‌ای با انرژی کمتر (E_L) منتقل می‌شود، فوتون گسیل می‌کند و برای این‌که الکترون از لایه‌ای با انرژی کمتر (E_L) به لایه‌ای با انرژی بیشتر (E_U) منتقل شود باید فوتون جذب کند. به عبارت دیگر داریم:



در اتم هیدروژن انرژی مورد نیاز برای انتقال الکترون از حالت پایه $(n=۱)$ به بالاترین حالت برانگیخته $(n=\infty)$ برابر $۱۳/۶eV$ است. صرف این مقدار انرژی باعث جدا شدن الکترون از اتم می‌شود و یون مثبت هیدروژن (H^+) تشکیل می‌شود. این کمترین انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از حالت پایه، انرژی یونش الکترون نامیده می‌شود. برای به دست آوردن انرژی یونش الکترون‌هایی که در لایه‌های مختلف اتم هیدروژن قرار می‌گیرند می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$\begin{cases} E_n = \dfrac{-E_R}{n^۲} \\ E_\infty = ۰ \end{cases} \rightarrow \Delta E = E_\infty - E_n = \frac{E_R}{n^۲}$$

نکته: مقدار پیش‌بینی شده توسط مدل بور برای انرژی یونش اتم هیدروژن، توافق بسیار خوبی با مقدار تجربی دارد.

کنکور سراسری ریاضی ۱۴۰۰:

الکترون در اتم هیدروژن در حالت پایه قرار دارد. انرژی لازم برای اینکه الکترون از حالت پایه به اولین حالت برانگیخته جهش کند، چند ژول است؟

$(e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C\ ,\ E_R = ۱۳/۶eV)$

۱) $۱/۶۳۲\times۱۰^{-۱۸}$
۲) $۳/۱۷۶\times۱۰^{-۱۸}$
۳) $۴/۷۲\times۱۰^{-۱۹}$
۴) $۵/۴۴\times۱۰^{-۱۹}$

پاسخ: گزینه ۱

اولین حالت برانگیخته همان لایه $n=۲$ می‌باشد، بنابراین:

$$\Delta E = -E_R\left(\frac{۱}{n'^۲}-\frac{۱}{n^۲}\right) = -۱۳/۶\left(\frac{۱}{۲^۲}-\frac{۱}{۱^۲}\right)$$

$$\rightarrow \Delta E = -۱۳/۶\times-\frac{۳}{۴} = ۱۰/۲eV\times۱/۶\times۱۰^{-۱۹} = ۱۶/۳۲\times۱۰^{-۱۹}J = ۱/۶۳۲\times۱۰^{-۱۸}J$$

گام اول:

در اتم هیدروژن، اولین حالت برانگیخته، مدار $n=2$ است. در این سؤال، الکترون در چهارمین حالت برانگیخته قرار دارد. منظور از چهارمین حالت برانگیخته، مدار $n=5$ است. حال برای اینکه فوتونی با کمترین انرژی تابش شود، الکترون باید به مدار $n=4$ منتقل شود.

گام دوم:

می‌دانیم شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن از رابطه $r_n=n^2a_0$ به دست می‌آید، حال شعاع مدارهای $n=4$ و $n=5$ را به دست می‌آوریم و سپس شعاع مدار $n=4$ را تقسیم بر شعاع مدار $n=5$ می‌کنیم، تا ببینیم شعاع مدار حرکت الکترون در طی انتقال الکترون از مدار $n=5$ به مدار $n=4$ چند برابر شده است:

$$\left.\begin{array}{l} r_n=n^2a_0 \xrightarrow{n=4} r_4=(4)^2a_0 \to r_4=16a_0 \\ r_n=n^2a_0 \xrightarrow{n=5} r_5=(5)^2a_0 \to r_5=25a_0 \end{array}\right\} \to \frac{r_4}{r_5}=\frac{16a_0}{25a_0} \to \frac{r_4}{r_5}=\frac{16}{25}$$

پس شعاع مدار حرکت الکترون در طی انتقال الکترون از مدار $n=5$ به مدار $n=4$، $\frac{16}{25}$ برابر شده است.

گام سوم:

در اتم هیدروژن، انرژی الکترون در مدارهای $n=4$ و $n=5$، برابر است با: (البته ممکن است بعضی‌ها، انرژی الکترون در مدارهای اتمی هیدروژن را حفظ باشند.)

$$E_n=\frac{-E_R}{n^2} \xrightarrow[n=4]{E_R=13/6eV} E_4=\frac{-13/6}{(4)^2}=\frac{-13/6}{16}=-0/85eV$$

$$E_n=\frac{-E_R}{n^2} \xrightarrow[n=5]{E_R=13/6eV} E_5=\frac{-13/6}{(5)^2}=\frac{-13/6}{25}=-0/544eV$$

الکترون از مدار $n=5$ به مدار $n=4$ رفته است، در این صورت، انرژی فوتون تابش‌شده برابر اختلاف انرژی مدار $n=4$ و مدار $n=5$ است. پس با استفاده از رابطهٔ (معادله گسیل فوتون از اتم) $E_U-E_L=hf$، که در آن، E_U، انرژی الکترون در مدار $n=5$ $(E_U=E_5)$ و E_L، انرژی الکترون در مدار $n=4$ است $(E_L=E_4)$، بسامد فوتون تابش‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$E_U-E_L=hf \xrightarrow[E_L=E_4]{E_U=E_5} E_5-E_4=hf \xrightarrow[h=4\times10^{-15}eV.s]{E_5=-0/544eV\ ,\ E_4=-0/85eV}$$

$$-0/544-(-0/85)=4\times10^{-15}\times f$$

$$\to -0/544+0/85=4\times10^{-15}\times f \to 0/306=4\times10^{-15}\times f$$

$$\to f=\frac{0/306}{4\times10^{-15}}=7/65\times10^{13}Hz$$

گروه آموزشی ماز

۱

۳۹ در اتم هیدروژن، اگر الکترون از مداری که شعاع آن $16a_0$ است به مداری با شعاع $4a_0$ برود، فوتونی با بسامد f تابش می‌کند و اگر الکترون از مداری با شعاع $25a_0$ به مداری با شعاع $9a_0$ برود، فوتونی با بسامد f' تابش می‌کند. نسبت $\frac{f'}{f}$ کدام است؟ (a_0 شعاع بور است.)

۱) $\frac{256}{675}$

۲) $\frac{16}{25}$

۳) $\frac{256}{525}$

۴) $\frac{16}{7}$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ مفهومی و محاسباتی ـ ۱۲۰۵)

پاسخ تشریحی:

با توجه به رابطهٔ $r_n = n^{۲}a$، در حالت اول، الکترون از مدار $n = ۴$ به مدار $n = ۲$ رفته و در حالت دوم از مدار $n = ۵$ به $n = ۳$ رفته است. انرژی فوتون تابش‌شده در هر حالت برابر است با:

$$\left\{\begin{array}{l} n = ۳ \rightarrow E_{۳} = \frac{-E_R}{۳^{۲}} = \frac{-E_R}{۹} \\ n = ۵ \rightarrow E_{۵} = \frac{-E_R}{۵^{۲}} = \frac{-E_R}{۲۵} \end{array}\right. \rightarrow hf' = E_R\left(\frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۲۵}\right) \text{ رابطهٔ (۱)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} n = ۲ \rightarrow E_{۲} = \frac{-E_R}{۲^{۲}} = \frac{-E_R}{۴} \\ n = ۴ \rightarrow E_{۵} = \frac{-E_R}{۴^{۲}} = \frac{-E_R}{۱۶} \end{array}\right. \rightarrow hf = E_R\left(\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۶}\right) \text{ رابطهٔ (۲)}$$

با تقسیم رابطهٔ (۱) بر رابطهٔ (۲) داریم:

$$\frac{f'}{f} = \frac{\frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۲۵}}{\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۱۶}} = \frac{\frac{۱۶}{۲۲۵}}{\frac{۳}{۱۶}} = \frac{۲۵۶}{۶۷۵}$$

۴۰ کدام گزینه نادرست است؟

۱) در گسیل القایی، یک چشمهٔ انرژی خارجی باید وجود داشته باشد تا الکترون‌ها را به ترازهای انرژی بالاتر برانگیخته کند.

۲) در گسیل القایی، فوتون گسیل‌شده در جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند.

۳) مدت زمانی که الکترون‌ها در ترازهای شبه پایدار باقی می‌مانند، کوتاه‌تر از مدت زمانی است که الکترون‌ها در حالت برانگیختهٔ معمولی باقی می‌مانند.

۴) وارونی جمعیت الکترون‌ها در یک محیط لیزری مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در ترازهای شبه پایدار نسبت به تراز پایین‌تر بسیار بیشتر باشند.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ مفهومی و خطبه‌خط کتاب درسی ـ ۱۲۰۵)

لیزر

لیزر یکی از مهم‌ترین اختراعات قرن بیستم است، که کاربردهای زیادی در صنعت و پزشکی دارد. از جمله مهم‌ترین این کاربردها عبارتند از:

۱ـ استفاده در چاپگرها (پرینتر لیزری) در کپی اطلاعات روی CD و DVD و خواندن اطلاعات

۲ـ شبکه‌های کابل نوری

۳ـ اندازه‌گیری دقیق طول

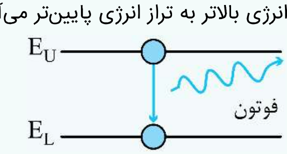
۴ـ در جوشکاری و برش‌کاری فلزات

۵ـ در پزشکی برای جراحی، برداشتن لکه‌های پوستی، اصلاح دید چشم و دندان‌پزشکی

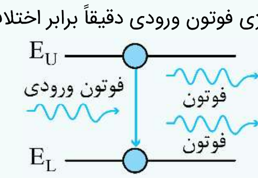
چگونگی ایجاد لیزر

همان‌طور که می‌دانید هنگامی که الکترون از تراز انرژی بالاتر (E_U) به تراز انرژی پایین‌تر (E_L) می‌آید، فوتون گسیل می‌کند. به طور کلی انتقال الکترون به دو صورت می‌تواند باعث گسیل فوتون شود:

الف: گسیل خودبه‌خودی: هنگامی که الکترون به صورت خودبه‌خودی از تراز انرژی بالاتر به تراز انرژی پایین‌تر می‌آید، گسیل خودبه‌خودی صورت می‌گیرد. در گسیل خودبه‌خودی، فوتون در جهتی کاتوره‌ای گسیل می‌شود.



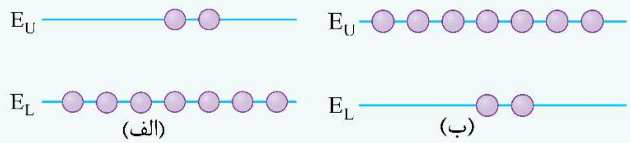
ب: گسیل القایی: اگر به الکترونی که در حالت برانگیخته قرار دارد، فوتونی با انرژی مناسب بتابد، الکترون تحریک شده و به مدار انرژی پایین‌تر می‌رود و فوتونی گسیل می‌کند که به آن گسیل القایی می‌گویند. برای روی دادن گسیل القایی باید انرژی فوتون ورودی دقیقاً برابر اختلاف انرژی دو تراز باشد.



در گسیل القایی سه ویژگی اصلی وجود دارد:

۱ـ یک فوتون جذب و دو فوتون خارج می‌شود. به این ترتیب تعداد فوتون‌ها افزایش یافته و نور تقویت می‌شود.

نکته: در گسیل القایی یک چشمهٔ انرژی خارجی مناسب باید وجود داشته باشد تا الکترون‌ها را به ترازهای انرژی بالاتر برانگیخته کند. این انرژی می‌تواند به روش‌های متعددی از جمله درخش‌های شدید نور معمولی و یا تخلیه‌های ولتاژ بالا فراهم شود. اگر انرژی کافی به اتم‌ها داده شود، الکترون‌های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته خواهند شد که به آن وارونی جمعیت گفته می‌شود. وارونی جمعیت الکترون‌ها در یک محیط لیزری مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در ترازهایی موسوم به ترازهای شبه پایدار نسبت به تراز پایین‌تر بسیار بیشتر باشند. در این ترازها الکترون‌ها مدت‌زمان بسیار طولانی‌تری $(10^{-3}s)$ نسبت به حالت برانگیخته معمولی $(10^{-8}s)$ باقی می‌مانند. این زمان طولانی‌تر، فرصت بیشتری برای افزایش وارونی جمعیت و در نتیجه تقویت نور لیزر فراهم می‌کند. به شکل‌های زیر دقت کنید.



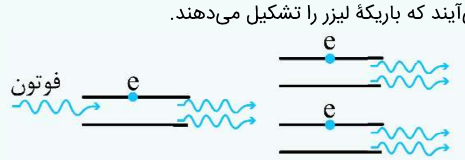
الف: به طور معمول و در دمای اتاق، بیشتر الکترون‌ها در تراز انرژی پایین‌تر قرار دارند.

ب: در وضعیتی که وارونی جمعیت به وجود آید بیشتر الکترون‌ها در تراز بالاتری (در مقایسه با تراز پایین‌تر) قرار دارند.

۲ـ فوتون گسیل‌شده در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند.

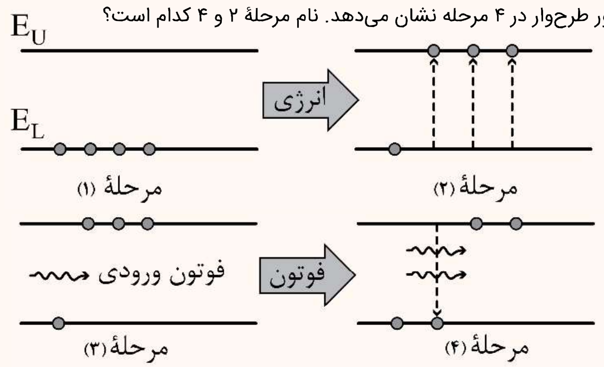
۳ـ فوتون گسیل‌شده با فوتون ورودی هم‌گام یا هم‌فاز است.

اساس کار لیزرها گسیل القایی است. فرض کنید مطابق شکل زیر، به یک اتم برانگیخته فوتونی با انرژی مناسب بتابانیم، همان‌طور که گفتیم در این فرایند دو فوتون مشابه به وجود می‌آید. حال اگر هر یک از این فوتون‌ها به دو اتم برانگیختهٔ دیگر بتابند، ۴ فوتون مشابه ایجاد می‌شود و اگر این فرایند ادامه پیدا کند، مجموعه‌ای از فوتون‌هایی هم‌بسامد، هم‌فاز و هم‌جهت به وجود می‌آیند که باریکهٔ لیزر را تشکیل می‌دهند.



کنکور سراسری تجربی ۱۴۰۲:

شکل زیر، فرایند ایجاد باریکهٔ لیزری را به طور طرح‌وار در ۴ مرحله نشان می‌دهد. نام مرحلهٔ ۲ و ۴ کدام است؟



۱) وارونی جمعیت و فرایند گسیل القایی
۲) برانگیختهٔ معمولی و فرایند گسیل القایی
۳) وارونی جمعیت و فرایند گسیل خودبه‌خود
۴) برانگیختهٔ معمولی و فرایند گسیل خودبه‌خود

پاسخ: گزینه ۱

مرحلهٔ (۲) وارونی جمعیت را نشان می‌دهد که در آن بیشتر الکترون‌ها در حالت برانگیخته قرار دارند.

مرحلهٔ (۴) گسیل القایی را نشان می‌دهد که در آن، تابش یک فوتون ورودی باعث گسیل فوتون جدیدی می‌شود و در نهایت دو فوتون خارج می‌شوند.

بررسی گزینه‌ها:

۱ـ در گسیل القایی، یک چشمهٔ انرژی خارجی باید وجود داشته باشد تا الکترون‌ها را به ترازهای انرژی بالاتر برانگیخته کند. این انرژی می‌تواند به روش‌های متعددی از جمله درخش‌های شدید نور معمولی و یا تخلیه‌های ولتاژ بالا فراهم شود. اگر انرژی کافی به اتم‌ها داده شود، الکترون‌های بیشتری به تراز انرژی بالاتر برانگیخته خواهند شد که به آن وارونی جمعیت گفته می‌شود. (✓)

۲ـ در گسیل القایی، سه ویژگی اصلی وجود دارد، یکی از این ویژگی‌ها، این است که، فوتون گسیل‌شده در همان جهت فوتون ورودی حرکت می‌کند. (✓)

۳ـ مدت زمانی که الکترون‌ها در ترازهای شبه پایدار باقی می‌مانند $(10^{-3}s)$، بسیار طولانی‌تر از مدت زمانی است که الکترون‌ها در حالت برانگیختهٔ معمولی باقی می‌مانند $(10^{-8}s)$. (✗)

۴ـ وارونی جمعیت الکترون‌ها در یک محیط لیزری، مربوط به وضعیتی است که تعداد الکترون‌ها در ترازهایی موسوم به ترازهای شبه پایدار نسبت به تراز پایین‌تر بسیار بیشتر باشند. (✓)

«فیزیک»

۴۱ پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

موارد «الف»، «پ» و «ت» درست و مورد «ب» نادرست است؛ زیرا طیف گسیلی حاصل از جامد ملتهب گسیلی پیوسته بوده و به‌کمک آن نمی‌توان جنس جامد را شناسایی کرد.

۴۲ پاسخ: گزینهٔ ۳ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

انرژی فوتون A، ۳ برابر انرژی فوتون B است، بنابراین:

$$E_A = ۳E_B \Rightarrow \frac{E_A}{E_B} = ۳ \xrightarrow{(E=\frac{hc}{\lambda})} \frac{E_A}{E_B} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} = ۳ \Rightarrow \lambda_B = ۳\lambda_A \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

اختلاف طول موج A و B برابر ۴۰۰nm است، در نتیجه:

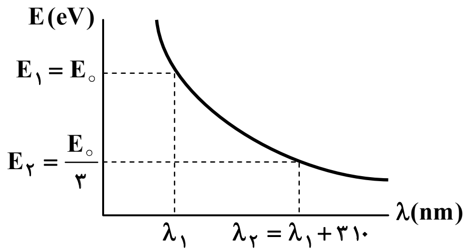
$$\lambda_B - \lambda_A = ۴۰۰\text{nm} \xrightarrow{\text{رابطهٔ (۱)}} ۳\lambda_A - \lambda_A = ۴۰۰ \Rightarrow ۲\lambda_A = ۴۰۰ \Rightarrow \lambda_A = ۲۰۰\text{nm} \ , \ \lambda_B = ۳\lambda_A = ۳\times۲۰۰ = ۶۰۰\text{nm}$$

در پایان f_A را به‌دست می‌آوریم:

$$\lambda_A = ۲۰۰\text{nm} \Rightarrow \frac{c}{f_A} = ۲۰۰\text{nm} \Rightarrow f_A = \frac{c}{۲۰۰\text{nm}} = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲۰۰\times۱۰^{-۹}} = \frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲\times۱۰^{-۷}} = ۱/۵\times۱۰^{۱۵}\,\text{Hz} = ۱۵۰۰\,\text{THz}$$

۴۳ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

با توجه به نمودار و رابطهٔ $E = \frac{hc}{\lambda}$ برای انرژی فوتون برحسب طول موج آن، داریم:



$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \frac{E_2}{E_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{\frac{E_\circ}{3}}{\frac{E_\circ}{1}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 310} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 310}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + 310 = 3\lambda_1 \Rightarrow 2\lambda_1 = 310 \Rightarrow \lambda_1 = 155\,\text{nm}$$

۴۴ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۵)

در مدت ۳ دقیقه و ۲۰ ثانیه، تعداد 3×10^{22} فوتون با طول موج $620\,\text{nm}$ از لامپ گسیل می‌شود، بنابراین توان تابشی لامپ برابر است با:

$$P_{\text{تابشی}} = \frac{E_{\text{تابشی}}}{t} = \frac{nhc}{\lambda t} = \frac{(3 \times 10^{22}) \times (1240\,\text{eV} \cdot \text{nm})}{(620\,\text{nm}) \times (3 \times 60 + 20)} = \frac{3 \times 10^{22} \times 2}{200} = 3 \times 10^{20}\,\frac{\text{eV}}{\text{s}} = 3 \times 10^{20} \times (1/6 \times 10^{-19})\frac{\text{J}}{\text{s}} = 48\,\text{W}$$

بازده لامپ در تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی تابشی ۴۰ درصد است، بنابراین:

$$Ra = \frac{P_{\text{تابشی}}}{P_{\text{الکتریکی}}} \Rightarrow 0/4 = \frac{48}{P_{\text{الکتریکی}}} \Rightarrow P_{\text{الکتریکی}} = \frac{48}{0/4} = 120\,\text{W}$$

همچنین شدت تابش لامپ برابر است با:

$$I = \frac{P_{\text{تابشی}}}{A} = \frac{P_{\text{تابشی}}}{4\pi r^2} = \frac{48}{4 \times 3 \times (4 \times 10^{-2})^2} = \frac{48}{4 \times 3 \times 16 \times 10^{-4}} = \frac{1}{4} \times 10^4 = 2500\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

۴۵ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: دشوار * فیزیک ۳ (فصل ۶)

$$\text{فعال باقی‌مانده}: N = \frac{N_\circ}{2^n} \qquad \text{تعداد واپاشی‌شده}: N' = N_\circ - \frac{N_\circ}{2^n} = N_\circ(1 - \frac{1}{2^n})$$

$$56 \times 10^{18} = N_\circ(1 - \frac{1}{2^n}) \quad \text{رابطهٔ (۱)}$$

$$(56 + 7) \times 10^{18} = N_\circ(1 - \frac{1}{2^{2n}}) = N_\circ(1 - \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{2^n}) \quad \text{رابطهٔ (۲)}$$

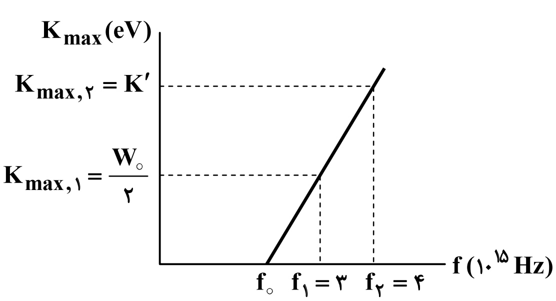
$$\xrightarrow{\text{روابط (۱) و (۲)}} \frac{63 \times 10^{18}}{56 \times 10^{18}} = \frac{N_\circ(1 - \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{2^n})}{N_\circ(1 - \frac{1}{2^n})} = 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^n} = \frac{63}{56} - 1 = \frac{7}{56} = \frac{1}{8} \Rightarrow n = 3 = \frac{12}{T} \Rightarrow T = 4\text{h}$$

$$56 \times 10^{18} = N_\circ(1 - \frac{1}{8}) = \frac{7}{8}N_\circ \Rightarrow N_\circ = 64 \times 10^{18}$$

۴۶ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: متوسط * فیزیک ۳ (فصل ۵)

با توجه به نمودار، با تابش نور به بسامد $f_1 = 3 \times 10^{15}\,\text{Hz}$ بر سطح فلز، بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها برابر $\frac{W_\circ}{2}$ می‌شود، بنابراین از رابطهٔ $K_{max} = hf - W_\circ$ داریم:



$$K_{max,1} = hf_1 - W_\circ \Rightarrow \frac{W_\circ}{2} = (4 \times 10^{-15}) \times (3 \times 10^{15}) - W_\circ \Rightarrow \frac{3W_\circ}{2} = 12 \Rightarrow W_\circ = 8\,\text{eV}$$

$$W_\circ = hf_\circ \Rightarrow 8 = (4 \times 10^{-15})(f_\circ) \Rightarrow f_\circ = 2 \times 10^{15}\,\text{Hz}$$

اکنون با مشخص شدن $W_\circ$ و f_2 می‌توان بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌هایی که از تابش نور با بسامد $f_2 = 2f_\circ$ به‌وجود می‌آیند را به‌دست آورد:

$$K_{max,2} = hf_2 - W_\circ \Rightarrow K' = h(2f_\circ) - W_\circ = 2hf_\circ - W_\circ = 2W_\circ - W_\circ \Rightarrow K' = W_\circ = 8\,\text{eV}$$

۴۷

پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ **مشخصات سؤال: متوسط ＊ فیزیک ۳ (فصل ۵)**

مجموعاً ۱۰ نوع فوتون تابش می‌شود که ۳ نوع آن فروسرخ است.

$$\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲} \Rightarrow \binom{۵}{۲} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$$

$۵ \rightarrow ۴$

$۵ \rightarrow ۳$

$۴ \rightarrow ۳$

۳ نوع آن مرئی است:

$۵ \rightarrow ۲$

$۴ \rightarrow ۲$

$۳ \rightarrow ۲$

۴ نوع آن فرابنفش است:

$۵ \rightarrow ۱$

$۴ \rightarrow ۱$

$۳ \rightarrow ۱$

$۲ \rightarrow ۱$

پس مجموعاً ۷ نوع آن مرئی و فرابنفش است.

۴۸ - پاسخ: گزینهٔ ۲ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❊ فیزیک ۳ (فصل ۵)

دقت کنید ۱۰۰ نانومتر یک طول موج فرابنفش است، پس گزینه‌های ۳ و ۴ نادرست هستند؛ زیرا گذارهای از مدار بالاتر به مدار ۳ یا بیشتر منجر به گسیل فوتون‌های فروسرخ می‌شوند و گذارهای از مدار ۳ یا ۴ یا ۵ یا ۶ به مدار ۲ هم فوتون‌های مرئی تولید می‌کنند.

$$hf = E_U - E_L$$

$$\Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = E_U - E_L \Rightarrow \frac{1200}{100} = -\frac{13.5}{n^2} - \frac{-13.5}{1} \Rightarrow 12 - 13.5 = -\frac{13.5}{n^2} \Rightarrow 1.5 = \frac{13.5}{n^2} \Rightarrow n = 3$$

۴۹ - پاسخ: گزینهٔ ۱ ▲ مشخصات سؤال: دشوار ❊ فیزیک ۳ (فصل ۵)

حالت پایه $n = 1$ است و حالت‌های برانگیخته از $n = 2$ و پس از آن هستند، پس چهارمین حالت برانگیخته می‌شود $n = 5$. برای انجام فرایند گسیل، الکترون از حالت بالاتر به پایین‌تر می‌رود. برای الکترونی که در تراز $n = 5$ است، کوچک‌ترین ΔE با ترازهای پایین‌تر مربوط به گذار ($5 \to 4$) است.

$$hf = E_5 - E_4 = \frac{-E_R}{25} - \frac{-E_R}{16}$$

$$\Rightarrow f = \frac{E_R}{h}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{25}\right) = \frac{9E_R}{400h} = \frac{9 \times 13.6 \times 1.6 \times 10^{-19}}{400 \times 6.6 \times 10^{-34}} = \frac{9 \times 13.6 \times 10^{14}}{25 \times 6.6} = \frac{3 \times 13.6}{2.2 \times 25} \times 10^{14} = \frac{40.8}{55} \times 10^{14} \simeq 7.4 \times 10^{13}\,\text{Hz}$$

۵۰ - پاسخ: گزینهٔ ۴ ▲ مشخصات سؤال: متوسط ❊ فیزیک ۳ (فصل ۵)

$$r_n = n^2 a_0 \Rightarrow \frac{r_n}{r_{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

$$\frac{64}{100} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \Rightarrow \frac{8}{10} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow 10n = 8n + 8 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow n + 1 = 5$$

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{100}\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{25}\right) = \frac{9}{25 \times 1600} \Rightarrow \lambda = \frac{25 \times 1600}{9} = \frac{40000}{9}\,\text{nm} = \frac{40}{9}\,\mu\text{m}$$